2. kolokvij iz Metoda optimizacije

Zadatak 1 [30 bodova] *Neka je dana funkcija* $f(x) = 2x_1^2 - 12x_2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 3$.

a) *Odredite prve dvije aproksimacije minimuma funkcije* f *i pripadne pogreške dobivene Gradijentnom metodom ako je* $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{8}$ *i* $x^{(0)} = [\,0,\, 1\,]^T$.

b) *Za zadanu početnu točku* x_0 *dali će metoda konvergirati?*

Napomena: Potrebno je točno iskazati teorem koji ste koristili prilikom rješavanja zadatka.

. [Rješenje: a) $x^{(1)} = [\,0.25,\, 1.25\,]^T$, $\alpha_1 = 1/8$, $x^{(2)} = [\,0.4375,\, 1.25\,]^T$, $\alpha_2 = \frac{1}{8}$

. b) Matrica $f''(x) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ je pozitivno definitna matrica pa je uvijet iz teorema 3.1. zadovoljen za $M = \lambda_1$, $m = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$) stoga po teoremu slijedi da metoda konvergira za svaku početnu točku.]

Zadatak 2 [15 bodova] *Za funkciju iz zadatka 1, uz početnu aproksimaciju* $x^{(0)} = [\,0,\, 1\,]^T$ *odredite Newtonovom metodom slijedeću aproksimaciju te pripadnu pogrešku.*

. [Rješenje:$x^{(1)} = [\,0.6667,\, 1.3333\,]^T$.]

Zadatak 3 [30 bodova] *Neka je* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dovoljno puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Neka je dan Newtonov iterativni proces* $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $\alpha_k > 0$.

a) *Ako je* $f''(x)$ *negativno definitna matrica* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, *pokažite da tada za dovoljno mali parametar* α_k *vrijedi* $f(x_k) < f(x_{k+1})$.

b) *Navedite barem dva načina izračuna duljine koraka* α_k *u Newtonovoj metodi.*

Zadatak 4 [25 bodova] *Koliko rješenja ima niže navedeni sustav? Odredite prve dvije aproksimacije nultočke* $x \in \mathbb{R}^2$ *ako je* $x_0 = [\,-1,\, 0\,]^T$ *te izračunajte pripadne pogreške (u* $\|\cdot\|_\infty$*) ako je*

$$\begin{aligned} x_2 - (x_1 - 2)^2 + 1 &= 0 \\ e^{x_1+1} - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

. [Rješenje: $x^{(1)} = [\,0,\ 2\,]^T$, $x^{(2)} = [\,0.0419331,\ 2.83227\,]^T$]