

Prvi kolokvij iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa
2013./14.

Zadatak 1. (5 bodova) *Lopta se puni zrakom tako da njezin volumen raste $10\text{cm}^3/\text{s}$. Odredite promjenu radijusa lopte u vremenu u trenutku kada je $r = 1\text{cm}$.*

Zadatak 2. (10 bodova) *Čestica se giba po pravcu s funkcijom pozicije $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 3t - 5$, $t \geq 0$. Odredite vremenske intervale u kojima čestica ubrzava, usporava i giba se konstantnom brzinom.*

Zadatak 3. (10 bodova) *Trošak proizvodnje $C(x)$ (u milijunima eura) za proizvodnju x zrakoplova godišnje je*

$$C(x) = 6 + 2\sqrt{x+1}, \quad x \geq 0.$$

Pomoću marginalnog troška predvidite trošak proizvodnje 16. zrakoplova i dobiveni rezultat usporedite sa stvarnim troškom.

Zadatak 4. (10 bodova) *Termometar koji pokazuje temperaturu od 25°C stavljen je u hladnjak na konstantnu temperaturu od 5°C . Nakon 3 minute termometar pokazuje temperaturu 15°C . Koliku će temperaturu pokazivati termometar nakon 10 min? Nakon koliko minuta će termometar početi pokazivati temperaturu 6°C ?*

Zadatak 5. (15 bodova) *Ulično svjetlo se nalazi na stupu visine 20m. Lopta je bačena vertikalno prema dolje s visine 20m na horizontalnoj udaljenosti 10m od stupa tako da je njezina visina u trenutku t dana s $h(t) = 20 - 4.9t^2$. Kolika je brzina gibanja sjene lopte na tlu u trenutku t ?*

Zadatak 6. (15 bodova) *Matematičko njihalo obješeno je na nerastezljivom užetu duljine 25cm. U trenutku t_0 u kojem se njihalo nalazi na vertikalnoj udaljenosti 1cm od položaja ravnoteže, njegova brzina u horizontalnom smjeru iznosi 2 cm/s. Odredite brzinu njihala u vertikalnom smjeru u trenutku t_0 .*

Zadatak 7. (15 bodova) *Odredite točku A na krivulji $r = \sin 3\varphi$ koja se nalazi u prvom kvadrantu i za koju je $|r|$ maksimalan, te dokažite da je u točki A tangenta na danu krivulju okomita na spojnicu OA točke A i ishodišta koordinatnog sustava.*

Zadatak 8. (20 bodova) *Ljestve AB duljine a naslonjene su na vertikalni zid OA . Ljestve padaju na način da podnožje B ljestava klizi po podlozi konstantnom brzinom v_0 . Dokažite da središte ljestvi opisuje luk kružnice sa središtem u O radijusa $a/2$. Odredite brzinu središta ljestvi u trenutku kada je podnožje B udaljeno $b < a$ od zida.*

Zadatak 9. (20 bodova) *U posudu koja sadrži 10l vode ulijeva se otopina koja sadrži 0.3 kg soli po jednoj litri, brzinom od 3l u minuti. Otopina se potpuno izmiješa i nakon toga istječe iz posude brzinom od također 3l u minuti. Odredite brzinu promjene količine soli u otopini.*

Zadatak 10. (20 bodova) *Na osnovi formule za zakrivljenost krivulje parametrizirane vektorskom funkcijom, izvedite formulu za zakrivljenost krivulje u polarnim koordinatama.*