Geometrija ravnine i prostora *
I. Vektori u ravnini i prostoru

Rudolf Scitovski, Darija Brajković

2. prosinca 2013.

Sadržaj

*Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika (30 sati predavanja i 45 sati vježbi, 7 ECTS bodova)

1 Uvod

Neka je E skup točaka u prostoru, a $A, B \in E$ dvije proizvoljne točke. Tada skup svih točaka na pravcu određenom točkama A, B, a koje leže između točaka A i B zovemo **dužinom** i označavamo s $\overline{AB}$. Ako primjerice, točku A proglasimo početnom, a točku B završnom, onda takvu dužinu nazivamo **usmjerenom dužinom** i označavamo s $\overrightarrow{AB}$.

Definicija 1. Kažemo da su dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ **ekvivalentne** i pišemo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ onda ako postoji translacija prostora koja točku A prevodi u A', a točku B u B'.

Primjedba 1. Primijetimo da za dvije ekvivalentne usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ vrijedi

- $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ su paralelne;
- $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ imaju istu orijentaciju[1];
- $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ imaju istu duljinu[2], koju ćemo označiti s $\|\overrightarrow{AB}\|$, odnosno s $\|\overrightarrow{A'B'}\|$.

Primjedba 2. Primijetimo još da je ekvivalencija usmjerenih dužina jedna **relacija ekvivalencije**, tj. da vrijedi

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (refleksivnost)

[1] ili da imaju isti smjer, odnosno da imaju isti vizualni smisao kretanja od početne prema završnoj točki

[2] u literaturi se za duljinu usmjerene dužine pojavljuju još i izrazi: norma, intenzitet, modul

2. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (simetričnost)

3. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \land \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (tranzitivnost)

Sada možemo definirati osnovni pojam – **pojam vektora**:

Definicija 2. Vektor $\vec{a}$ je klasa ekvivalencije svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina,

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

Svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{PQ}$ ekvivalentnu usmjerenoj dužini $\overrightarrow{AB}$ nazivamo **reprezentant** vektora $\vec{a}$. Pri tome pod **normom vektora** podrazumijevamo duljinu bilo kojeg reprezentanta, a označit ćemo ju s $\|\vec{a}\|$.

U daljnjem tekstu često ćemo govoriti o vektoru, a crtat ćemo neki njegov reprezentant.

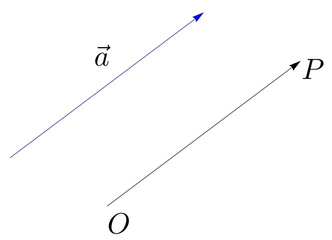
Primjer 1. Nulvektor *je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju istu početnu i završnu točku. Označavat ćemo ga s* $\vec{0}$*, pri čemu je* $\|\vec{0}\| = 0$.

Jedinični vektor *zvat ćemo svaki vektor* $\vec{e}$ *za koga je* $\|\vec{e}\| = 1$.

Suprotni vektor *vektora* $\vec{a}$ *je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju suprotnu orijentaciju od orijentacije usmjerenih dužina vektora* $\vec{a}$ *i označavamo ga s* $(-\vec{a})$.

Uočimo da vrijedi sljedeća važna činjenica:

Primjedba 3. Ako je O proizvoljna, ali fiksna točka u prostoru E, a $\vec{a}$ dani vektor, onda postoji jedinstvena točka $P \in E$, takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OP}]$ (Slika 1).



Slika 1: Jedinstveni reprezentant s fiksnom početnom točkom

Navedimo još nekoliko često korištenih pojmova.

– kažemo da su dva ili više vektora kolinearni ako njihovi reprezentanti leže na istom ili na paralelnim pravcima;

– kažemo da su tri ili više vektora komplanarni ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

U daljnjem tekstu koristit ćemo sljedeće oznake:

$X(E)$ – skup svih vektora u prostoru E;

$X(M)$ – skup svih vektora u ravnini M;

$X(p)$ – skup svih vektora na pravcu p.

Ako izaberemo jednu fiksnu točku $O \in E$, onda svakoj točki $P \in E$ pripada jedinstveni vektor $\overrightarrow{OP}$, koji zovemo **radijvektor** ili vektor položaja. Skup svih ovakvih radijvektora označit ćemo s

$$X_0 = X_0(E) := \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}.$$

Očigledno postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0.

Z a d a c i

Zadatak 1. *Napišite definiciju realacije ekvivalencije.*

a) U skupu $\mathbb{Z}$ definirana je relacija "djeljivosti" na sljedeći način: Cijeli broj a je u relaciji ρ s cijelim brojem b i pišemo $a\rho b$ ako je a djeljiv s b. Zašto relacija ρ nije relacija ekvivalencije?

b) Koje od sljedećih relacija nisu relacije ekvivalencije u skupu $X_0(E)$? Zašto?

a) paralelnost b) okomitost c) kolinearnost d) komplanarnost

Zadatak 2. *Zašto skup $\mathbb{N} \cup \{0\}$, snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i skup cijelih brojeva snabdjeven binarnom operacijom množenja nisu grupe?*

Zadatak 3. *Neka je G skup svih kompleksnih brojeva različitih od nule oblika $a + i\,b\sqrt{2}$, gdje su a i b racionalni brojevi, tj. $G = \{z \in \mathbb{C} : z = a + i\,b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$. Pokažite da je G Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi? Što je inverzni element elementa $z = a + i\,b\sqrt{2}$?*
Rješenje: $e = 1$; $\quad z^{-1} = \frac{a}{a^2+2b^2} - i\frac{b}{a^2+2b^2}\sqrt{2}$

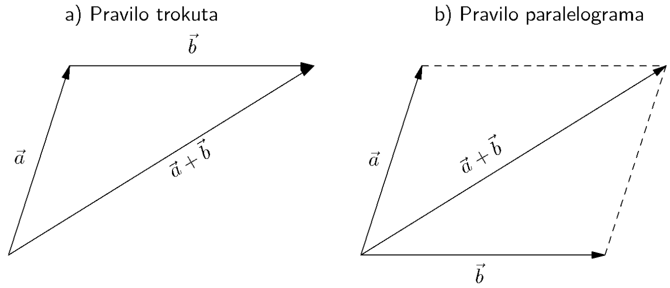
Zadatak 4. *Neka je $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ podskup u skupu kompleksnih brojeva. Pokažite da je G Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi ? Napravite tablicu množenja za ovu grupu.*
Rješenje: $e = 1$

2 Operacije s vektorima

2.1 Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora je binarna operacija, tj. funkcija dviju varijabli $+ : X(E) \times X(E) \to X(E)$. Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{c} := \vec{a} + \vec{b}$ pravilom trokuta (vidi Sliku 2.a) ili pravilom paralelograma (vidi Sliku 2.b).

Binarna operacija zbrajanja vektora ima svojstvo zatvorenosti ili grupoidnosti, tj. rezultat operacije zbrajanja dva vektora opet je jedan vektor. Pored toga,



Slika 2: Pravila za zbrajanje vektora

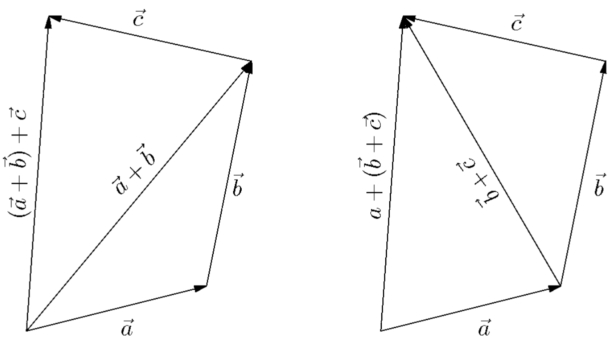
(i) vrijedi svojstvo asocijativnosti, tj. za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X(E)$ vrijedi: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(ii) postoji neutralni element $\vec{0}$, tako da za proizvoljni vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

(iii) za svaki vektor $\vec{a} \in X(E)$ postoji inverzni element – suprotni vektor $(-\vec{a})$, takav da vrijedi:
$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

(iv) vrijedi zakon komutacije, tj. za svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ vrijedi: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

Navedena svojstva lako se mogu ilustrirati. Primjerice, svojstvo asocijativnosti ilustrirano je na Slici 3.



Slika 3: Ilustracija svojstva asocijativnosti zbrajanja vektora

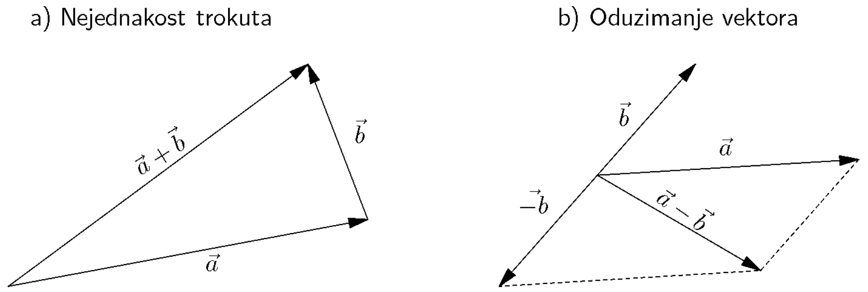
Skup svih vektora u prostoru snabdjeven računskom operacijom zbrajanja i prethodno navedenim svojstvima nazivamo **komutativna** ili **Abelova grupa**[3] i označavamo s $(X(E),+)$.

[3]Niels Abel (1802-1829), norveški matematičar.

Primjer 2. *Odaberimo reprezentante vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tako da oni leže na stranicama trokuta i da bude $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (vidi Sliku 4.a). Kako je u svakom trokutu duljina jedne njegove stranice manja od zbroja duljina preostale dvije, vrijedi tzv.* nejednakost trokuta

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Pri tome jednakost vrijedi u slučaju ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni.



Slika 4: Ilustracija nejednakosti trokuta (lijevo) i oduzimanja vektora (desno)

Primjedba 4. Oduzimanje vektora možemo definirati preko zbrajanja, koristeći inverzni element (suprotni vektor – vidi Sliku 4.b):

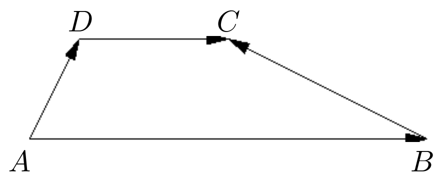
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Primjedba 5. Množenje vektora prirodnim brojem možemo definirati induktivno:

$$n \cdot \vec{a} = (n-1) \cdot \vec{a} + \vec{a}, \qquad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Z a d a c i

Zadatak 5. *Zadan je trapez čije su stranice usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ kao na slici, pri čemu je $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC}$. Prikažite usmjerenu dužinu $\overrightarrow{BC}$ pomoću usmjerenih dužina $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.* *[$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]*



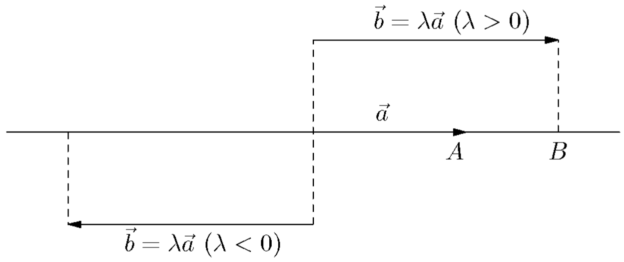
Zadatak 6. *Matematičkom indukcijom dokažite generaliziranu nejednakost trokuta*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\vec{a}_i\|.$$

Kada će u ovoj nejednakosti vrijediti jednakost?

2.2 Množenje vektora skalarom

Množenje vektora sa skalarom je funkcija dviju varijabli $\cdot : \mathbb{R} \times X(E) \to X(E)$. Za realni broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{b} := \lambda \cdot \vec{a}$ kao na Slici 5.

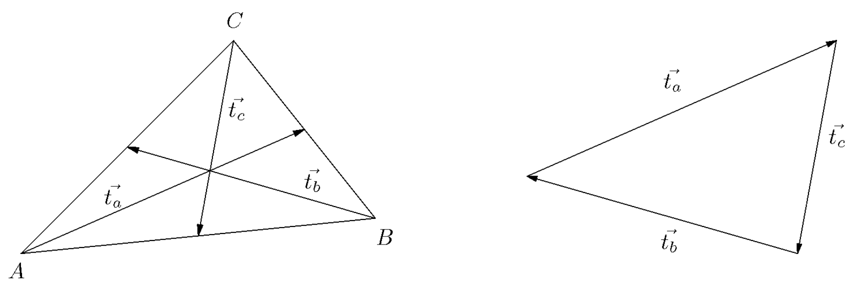


Slika 5: Množenje vektora sa skalarom

Zadatak 7. *Za zadane vektore $\vec{a}, \vec{b} \in X(M)$ nacrtajte vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$.*

Zadatak 8. *Pokažite da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju.*

Primjer 3. *Treba dokazati da postoji trokut sa stranicama koje su jednake i paralelne s težišnicama bilo kojeg zadanog trokuta (vidi Sliku 6).*



Slika 6: Slika uz Primjer 3

Koristeći prethodni zadatak, dobivamo:

$$\begin{aligned} \vec{t_a} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \\ \vec{t_b} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}), \\ \vec{t_c} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}), \end{aligned}$$

odakle zbrajanjem dobivamo $\vec{t_a} + \vec{t_b} + \vec{t_c} = \vec{0}$.

U kontinuitetu sa svojstvima koja vrijede za zbrajanje vektora, navedimo i svojstava koja vrijede za množenje vektora sa skalarom:

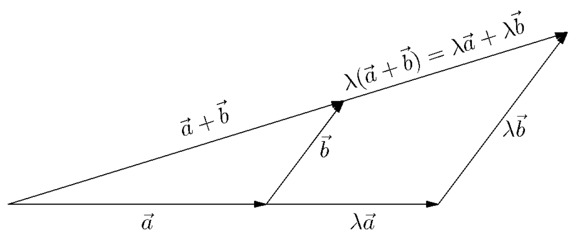
(v) za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi distributivnost obzirom na vektorski faktor: $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

(vi) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi distributivnost obzirom na skalarni faktor: $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

(vii) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi svojstvo kvaziasocijativnosti: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;

(viii) za bilo koji vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Svojstvo (v) proizlazi iz sličnosti trokuta i ilustrirano je na Slici 7



Slika 7: Ilustracija distributivnosti množenja sa skalarom

Svojstva (vi) i (vii) dokazuju se posebno za svaku kombinaciju predznaka skalara λ i μ (vidi [11]).

Skup $X(E)$ snabdjeven binarnim operacijama zbrajanja i množenja sa skalarom, koje imaju navedenih osam svojstava nazivamo **vektorski prostor** i označavamo s $(X(E), +, \cdot)$. Analogno se definiraju i vektorski prostor $(X(M), +, \cdot)$ u ravnini i vektorski prostor $(X(p), +, \cdot)$ na pravcu. Kako je $X(M) \subset X(E)$, reći ćemo da je vektorski prostor $(X(M), +, \cdot)$ **vektorski potprostor** u $(X(E), +, \cdot)$. Nadalje ćemo ove vektorske prostore označavati samo s $X(E), X(M), X(p)$.

Primjedba 6. Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ dva kolinearna vektora, tada postoji pravac p i točke $O, A, B \in p$ takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$, pri čemu je

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \quad \text{gdje je} \quad \lambda = \begin{cases} \|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \text{ imaju isti smjer} \\ -\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \text{ su suprotnog smjera} \end{cases}$$

Matematičku strukturu $(X_0, +, \cdot)$ zovemo **vektorski prostor radijvektora**, pri čemu je $+ : X_0 \times X_0 \to X_0$ zbrajanje sa svojstvima

(i) $(\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0) \quad (\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$ [asocijativnost]

(ii) $(\exists\, \vec{0} \in X_0)\, (\forall \vec{a} \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ [$\vec{0}$ je neutralni element za zbrajanje]

(iii) $(\forall\, \vec{a} \in X_0)\, (\exists!\, \vec{a'} \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{a'} = \vec{a'} + \vec{a} = \vec{0}$ [inverzni element: $\vec{a'} = -\vec{a}$]

(iv) $(\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [komutativnost]

$\cdot : \mathbb{R} \times X_0 \to X_0$ množenje sa skalarom sa svojstvima

(v) $(\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in X_0)\,(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ [distributivnost u vektorskom faktoru]

(vi) $(\forall\, \vec{a} \in X_0)\,(\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ [distributivnost u skalarnom faktoru]

(vii) $(\forall\, \vec{a} \in X_0)\,(\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ [kvaziasocijativnost]

(vii) $(\forall\, \vec{a} \in X_0) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

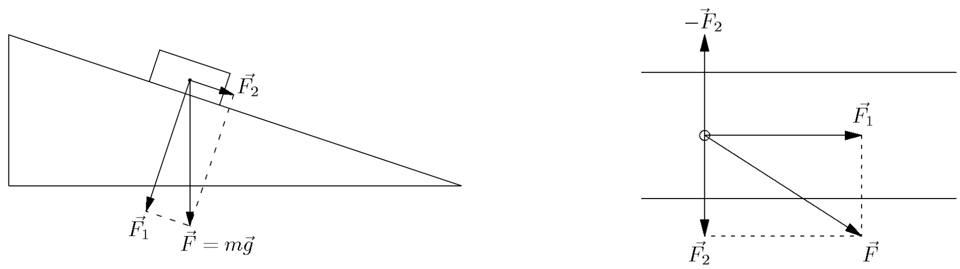
3 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija 3. Ako su $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ vektori, a $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalari, tada vektor $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n \in X_0$ nazivamo **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Kažemo još da je vektor $\vec{a}$ rastavljen (razvijen) po vektorima $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Pogledajmo dva jednostavna fizikalna primjera (vidi Sliku 8):

- na tijelo na kosini djeluje sila teža $\vec{F}$, koju po pravilu paralelograma rastavljamo na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;

- na tijelo u vodi djeluje vučna sila $\vec{F}$, koju također rastavljamo po pravilu paralelograma na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;



Slika 8: Rastav sile

Navedene rastave možemo zapisati kao $1 \cdot \vec{F} + (-1) \cdot \vec{F}_1 + (-1) \cdot \vec{F}_2 = \vec{0}$.

Definicija 4. Kažemo da je skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ **linearno nezavisan** ako njihova proizvoljna linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

U protivnom kažemo da je skup vektora **linearno zavisan**, tj. postoji barem jedna njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način, tj.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{pri čemu} \quad \exists\, \lambda_i \neq 0.$$

Primjer 4. *Ako skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sadrži nulvektor, on je linearno zavisan.*

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je baš prvi vektor $\vec{a}_1$ nulvektor. Tada možemo utvrditi da vrijedi:

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0},$$

pa smo na taj način pronašli jednu linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, koja iščezava na netrivijalan način.

Primijetite da su sile $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ iz fizikalnih primjera s početka odjeljka također linearno zavisne. Sljedeći teorem ukazuje nam kako se na jedan operativniji način može ustanoviti je li skup vektora linearno zavisan ili nezavisan.

Teorem 1. *Skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ je linearno zavisan onda i samo onda ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.*

Dokaz. (Nužnost) Pretpostavimo da je skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisan. Po prethodnoj definiciji to znači da postoji njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$, a da je pri tome $\lambda_1 \neq 0$. Tada možemo pisati

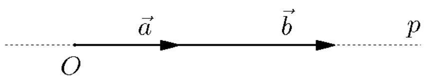
$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\vec{a}_n\,.$$

(Dovoljnost) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \cdots + \beta_n\vec{a}_n$ iz čega slijedi

$$1 \cdot \vec{a}_1 + (-\beta_2)\vec{a}_2 + \cdots + (-\beta_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Po definiciji to znači da su vektori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisni. ♣

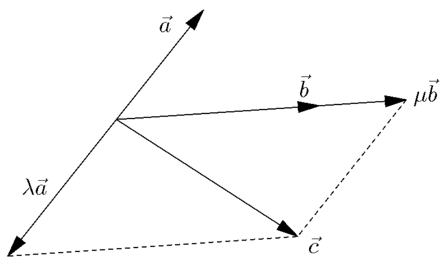
Primjer 5. *Bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(p)$ je jedan).*



Slika 9: Linearna zavisnost dvaju vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$

Primjer 6. *Bilo koja tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(M)$ je dva).*

Primjer 7. *Bilo koja četiri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in X_0(E)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(E)$ je tri).*



Slika 10: Linearna zavisnost triju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$

Zadatak 9. *Pokažite da su dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$ kolinearna onda i samo onda ako su linearno zavisna.*

Zadatak 10. *Pokažite da su tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ komplanarna onda i samo onda ako su linearno zavisna.*

Teorem 2. *Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora u ravnini, tada se svaki vektor $\vec{c} \in X_0(M)$ na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}$.*

Dokaz. Prema Primjeru 6 vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno zavisni pa prema Teoremu 1 vrijedi

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\,. \tag{1}$$

U svrhu dokaza jedinstvenosti ovog rastava, pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se vektor $\vec{c}$ barem na još jedan način može prikazati pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \lambda'\vec{a} + \mu'\vec{b} \tag{2}$$

Oduzimanjem jednakosti (1), (2) dobivamo

$$(\lambda - \lambda')\vec{a} + (\mu - \mu')\vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ linearno nezavisni, slijedi: $\lambda = \lambda' \quad \& \quad \mu = \mu'$. ♣

Teorem 3. *Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ tri linearno nezavisna vektora u prostoru, tada se svaki vektor $\vec{d} \in X_0(E)$ na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Zadatak 11. *Neka je $O \in E$ fiksna točka i neka točka $C \in E$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $3:1$, tj. $d(A,C):d(C,B) = 3:1$. Vektor $\overrightarrow{OC}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.*
Rješenje: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

Zadatak 12. *Provjerite jesu li vektori:* $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$ *linearno zavisni.*
Rješenje: Jesu, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

4 Baza vektorskog prostora. Koordinatni sustav

Definicija 5.

Uređena trojka $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ linearno nezavisnih vektora iz $X_0(E)$ zove se **baza vektorskog prostora** $X_0(E)$.

Uređen par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ linearno nezavisnih vektora iz $X_0(M)$ zove se baza vektorskog prostora $X_0(M)$.

Svaki nenul vektor $(\vec{e})$ iz $X_0(p)$ čini bazu vektorskog prostora $X_0(p)$.

Neka je $\vec{a} \in X_0(E)$, a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ baza u $X_0(E)$. Tada vektor $\vec{a}$ na jedinstven način možemo zapisati

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Brojeve a_1, a_2, a_3 zovemo **koordinate** (komponente) vektora $\vec{a}$ u bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

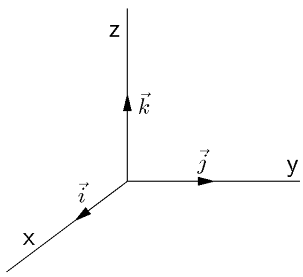
Sada prirodno slijede pravila za zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom ako su oni zadani sa svojim koordinatama:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \quad \text{[zbrajanje]}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3 \quad \text{[množenje vektora skalarom]}$$

Definicija 6. Par $(O\,;\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ fiksne točke O i baze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ zovemo **Kartezijev**[4] **koordinatni sustav u prostoru** E.

Posebno je pogodno ako za bazu prostora $X_0(E)$ izaberemo uređenu trojku međusobno okomitih i jediničnih (dugačkih 1!) vektora, koje obično označavamo s $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tako dobivamo **pravokutni Kartezijev koordinatni sustav** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pravac određen vektorom $\vec{i}$ označavamo sa x i zovemo **os apscisa**, pravac određen vektorom $\vec{j}$ označavamo sa y i zovemo **os ordinata**, a pravac određen vektorom $\vec{k}$ označavamo sa z i zovemo **os aplikata**.



Slika 11: Pravokutni Kartezijev koordinatni sustav

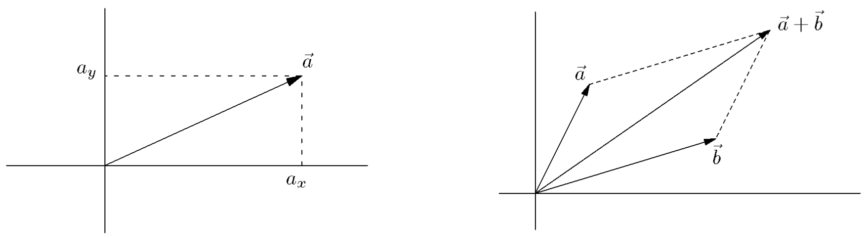
[4]Rene Descartes (1596-1650), francuski filozof i matematičar. Njegovo latinizirano ime je Cartesius

Primjedba 7. Ranije smo utvrdili da postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0. Primijetite da također postoji bijekcija između skupa svih uređenih trojki realnih brojeva $\mathbb{R}^3$ i vektorskog prostora $X_0(E)$ jer svakoj uređenoj trojki $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ na jedinstven način možemo pridružiti vektor $\vec{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ iz prostora $X_0(E)$ i obrnuto. Zato ćemo često po potrebi povezivati, pa neki puta i poistovjećivati pojmove: skup E, vektorski prostor $X_0(E)$ i $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 13. *Provjerite čine li vektori* $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\quad \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ *bazu u vektorskom prostoru* $X_0(M)$. *Ako čine, vektor* $\vec{c} = -11\vec{i} + 6\vec{j}$ *prikažite u toj bazi.*
Rješenje: čine, $\vec{c} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$.

5 Norma vektora

Pretpostavimo da je u ravnini M definiran pravokutni Kartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j})$ i neka je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$. Sada možemo izračunati (vidi Sliku 13) duljinu ovog vektora $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.



Slika 12: Norma vektora (lijevo) i nejednakost trokuta (desno)

Primjetite da za ovako definiranu duljinu vektora vrijedi

(i) $\|\vec{a}\| \geq 0 \quad \& \quad (\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$,

(ii) $\|\lambda\vec{a}\| =| \lambda | \, \|\vec{a}\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

Duljina (norma, intenzitet) vektora može se i općenito definirati:

Definicija 7. Neka je X_0 vektorski prostor. Funkciju $\| \cdot \| : X_0 \to [0, \infty)$, koja svakom vektoru $\vec{a} \in X_0$ pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s $\|\vec{a}\|$ ili jednostavno a zovemo **norma** vektora $\vec{a}$ ako vrijedi

(i) $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ [pozitivna definitnost],

(ii) $\|\lambda\vec{a}\| =| \lambda | \, \|\vec{a}\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaki $\vec{a} \in X_0$,

(iii) $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ za svaki $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$ [nejednakost trokuta].

Najčešće korištene vektorske norme su[5]

$$\|\vec{a}\|_1 = | a_1 | + | a_2 | + | a_3 |, \qquad (l_1 \text{ norma})$$

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \qquad (l_2 \text{ ili Euklidova norma})$$

$$\|\vec{a}\|_\infty = \max\{| a_1 |, | a_2 |, | a_3 |\}, \qquad (l_\infty \text{ norma ili Čebiševljeva norma})$$

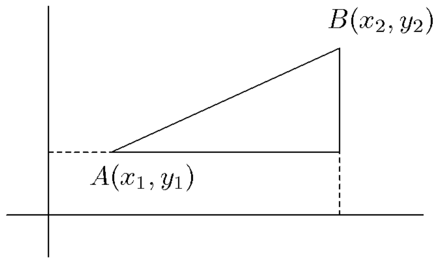
Zadatak 14. *Pokažite da spomenute norme imaju sva svojstva navedena u prethodnoj definiciji.*

5.1 Udaljenost dviju točaka

Udaljenost dviju točaka $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in M$ u ravnini M u kojoj je uveden pravokutni Kartezijev koordinatni sustav možemo izračunati (vidi Sliku 13) po formuli

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

Ako definiramo radijvektore $\vec{r}_A, \vec{r}_B \in X_0(M)$,



Slika 13: Udaljenost točaka u ravnini

$$\vec{r}_A = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \qquad \vec{r}_B = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

onda udaljenost zapisanu formulom (3) možemo zapisati kao

$$d_2(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2, \quad \text{gdje je} \quad \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}. \tag{4}$$

Na sličan način može se definirati i udaljenost dviju točaka preko l_1 ili l_∞ norme sljedećim formulama:

$$d_1(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_1 \qquad d_\infty(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_\infty \tag{5}$$

Koji je geometrijski smisao d_2, odnosno d_∞ udaljenosti dviju točaka $A, B \in M$?

[5] U programskom sustavu *Mathematica* l_2-normu vektora $\vec{a}$ dobivamo naredbom `Norm[a]`, gdje je a lista

Zadatak 15. *Pokažite da funkcije* d_i, $i = 1, 2, \infty$ *definirane s* (4)–(5) *zadovoljavaju sljedeća svojstva*

$$\begin{aligned} (i) &\quad d_i(A,B) \geq 0, \quad \forall A, B \in M, \\ (ii) &\quad d_i(A,B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B, \\ (ii) &\quad d_i(A,B) = d_i(B,A), \quad \forall A, B \in M, \\ (iv) &\quad d_i(A,B) \leq d_i(A,C) + d_i(C,B), \quad \forall A, B, C \in M. \end{aligned}$$

Zadovoljava li funkcija $d_{LS}(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2^2$ *navedena svojstva?*

Zadatak 16. *Jedinična "kružnica" sa središtem u* $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^2$ *definira se kao skup* $\partial K = \{T \in M : \ d(O,T) = 1\}$. *Nacrtajte jedinične kružnice ako se udaljenost definira s* d_1, d_2 *ili* d_∞.

Zadatak 17. [25 bodova] *Zadan je trapez* $ABCD$ *s vrhovima:* $A(-3,2,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,2,-3)$. *Odredite četvrti vrh* D *ako vrijedi* $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{DC}$.
Rješenje: $\vec{r}_D = \vec{r}_C - \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_A$, $D(3,3,-4)$.

Zadatak 18. [25 bodova] *Zadan je trokut* ABC *s vrhovima:* $A(-3,2,1)$, $B(3,-2,2)$, $C(5,2,-4)$. *Odredite duljinu težišnice iz vrha* A.
Rješenje: $P_A(4,0,-1)$, $\overrightarrow{AP_A} = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $d = \sqrt{57}$.

Zadatak 19. *Zadan je paralelogram* $ABCD$ *s vrhovima:* $A(-3,2,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,2,-3)$, $D(-1,5,-6)$. *Izračunajte udaljenost točke* A *do sjecišta njegovih dijagonala.*
Rješenje: $S(1,2,-1)$, $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_D - \vec{r}_B), d(A,S) = 2\sqrt{5}$.

Zadatak 20. *Dokažite da vektor* $\vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ *s početkom u točki* O *ima vrh u polovištu dužine* $\overline{AB}$.

6 Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost

Lema 1. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratna funkcija* $f(x) = ax^2 + 2bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a > 0$. *Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} (i) &\quad b^2 - ac \leq 0 \iff f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ (ii) &\quad b^2 - ac = 0 \iff f(-\tfrac{b}{a}) = 0 \quad \& \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{b}{a}\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Nultočke kvadratne funkcije f dobiju se iz dobro poznate formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}, \quad D = b^2 - ac.$$

Budući da je $a > 0$ graf ove kvadratne funkcije (parabola) okrenut je prema gore i očigledno vrijedi

$$f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow D \leq 0 \Longleftrightarrow b^2 - ac \leq 0.$$

Ako je $D = b^2 - ac = 0$, onda za $x_0 = -\frac{b}{a}$ vrijedi $f(x_0) = 0$ i $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ i obrnuto. ♣

Teorem 4. (Cauchy – Schwarz – Buniakowsky). *Za proizvoljne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \tag{6}$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda

- *ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ ili $b_1 = \cdots = b_n = 0$ ili*
- *ako je barem jedan $a_i \neq 0$ ali postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da je $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.*

Dokaz.

1. Ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ (odnosno $b_1 = \cdots = b_n = 0$), teorem očigledno vrijedi.

2. Pretpostavimo zato da je barem jedan $a_i \neq 0$ i definirajmo pomoćnu funkciju

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2,$$

koju možemo zapisati u obliku

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c, \qquad a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Kako je $a > 0$ i $f(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$, onda prema prethodnoj lemi mora biti

$$b^2 - ac \leq 0, \tag{7}$$

što je zapravo nejednakost (6).

Još je preostalo dokazati da u (6) stoji jednakost onda i samo onda ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da u (6), odnosno (7), stoji jednakost. Prema prethodnoj lemi tada je $f(x) = 0$ za $x = x_0 = -\frac{b}{a}$, tj. vrijedi

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{b}{a} a_k + b_k\right)^2 = 0,$$

iz čega slijedi

$$-\frac{b}{a} a_k + b_k = 0 \Longrightarrow b_k = \frac{b}{a} a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$. Tada je specijalno

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda a_k = \lambda a,$$
$$c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k)^2 = \lambda^2 a,$$

pa imamo

$$D = b^2 - ac = (\lambda a)^2 - a \cdot \lambda^2 \cdot a = 0,$$

što daje jednakost u (7), odnosno (6).

♣

Korolar 1. (Hölderova nejednakost). *Za proizvoljne realne brojeve $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \tag{8}$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda

- *ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ ili $b_1 = \cdots = b_n = 0$ ili*
- *ako je barem jedan $a_i \neq 0$ i ako postoji $\lambda \geq 0\,!$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$.*

Dokaz.

1. Ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ (odnosno $b_1 = \cdots = b_n = 0$), korolar očigledno vrijedi.

2. Pretpostavimo zato da je barem jedan $a_i \neq 0$. Budući da uz ranije oznake iz (7) slijedi $b \leq |b| \leq \sqrt{a}\sqrt{c}$, imamo

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = a + 2b + c \leq a + 2\sqrt{a}\sqrt{c} + c = \left(\sqrt{a} + \sqrt{c}\right)^2, \tag{9}$$

što daje (8).

Još je preostalo dokazati da u (6) stoji jednakost onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$.

($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da u (8), stoji jednakost. To znači da i u (9) stoji jednakost, a to znači da je $b = \sqrt{a}\sqrt{c}$, odnosno $b^2 - ac = 0$. Prema Lemi 1 vrijedi

$$0 = f(-\tfrac{b}{a}) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_k \left(-\tfrac{b}{a}\right) + b_k\right)^2,$$

iz čega slijedi $b_k = \lambda a_k$, za svaki $k = 1, \dots, n$, pri čemu je $\lambda = \frac{b}{a} \geq 0$.

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da postoji $\lambda \geq 0$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$. Kako je

$$a := \sum_{i=1}^{n} a_k^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_k^2 = \lambda^2 a,$$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_k + \lambda a_k)^2 = (1+\lambda)^2 a,$$

vrijedi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} = (1+\lambda)\sqrt{a} - \sqrt{a} - \lambda\sqrt{a} = 0,$$

što znači da u (8) vrijedi jednakost.

♣

Korolar 2. (Nejednakost trokuta). *Za proizvoljne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - c_k)^2}, \tag{10}$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda

- *ako je $c_k = a_k$ ili $c_k = b_k$ za sve $k = 1, \ldots, n$ ili*
- *ako je barem jedan $c_i \neq a_i$ i ako postoji $\lambda \geq 0$, takav da bude $b_k - c_k = \lambda(c_k - a_k) \quad \forall k = 1, \ldots, n$.*

Dokaz ovog korolara neposredno slijedi iz prethodnog korolara uz zamjenu

$$a_k := b_k - c_k, \qquad b_k := c_k - a_k.$$

Primijetite specijalno ako su zadane točke $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ i ako se udaljenost dviju točaka definira sukladno formuli (3), odnosno (4), onda nejednakost (10) daje nejednakost trokuta u $\mathbb{R}^3$:

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B),$$

pri čemu jednakost vrijedi ako točka C leži na spojnici $\overline{AB}$.

Primjer 8. *Neka su x i y realni brojevi takvi da je $3x + 7y = 1$. Dokažite da je*

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{58}.$$

Primjenom CSB nejednakosti uz $n = 2$ i primjerice $a_1 = x$, $a_2 = y$, $b_1 = 3$ i $b_2 = 7$, dobivamo da je

$$(3x + 7y)^2 \leq (x^2 + y^2)(3^2 + 7^2),$$

tj.

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{58}.$$

Z a d a c i

Zadatak 21. *Neka su $x, y, z \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ takvi da je $x + y + z = 1$. Odredite maksimalnu vrijednost izraza*

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1}$$

Zadatak 22. *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Dokažite:*

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

Zadatak 23. *Dokažite da za svaki $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ vrijedi nejednakost*

$$(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4)\,.$$

Zadatak 24. *Neka su dana dva trokuta: trokut T_1 sa stranicama a, b, c i trokut T_2 sa stranicama x, y, z. Dokažite da su trokuti T_1 i T_2 slični ako i samo ako vrijedi*

$$(\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz})^2 = (a + b + c)(x + y + z).$$

Zadatak 25. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite:*

$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

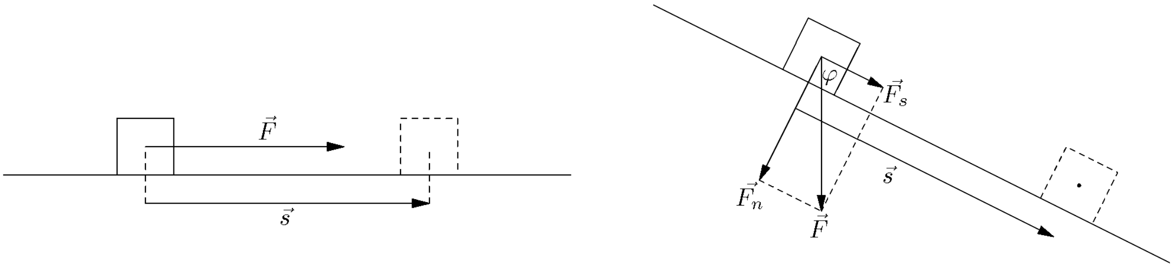
Zadatak 26. *Neka su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta (a, b - katete, c - hipotenuza). Dokažite:*

$$ab + bc + ca < 2c^2$$

7 Skalarni produkt

Motivacija za uvođenje pojma skalarnog produkta vektora je fizikalna definicija rada sile $\vec{F}$ na putu $\vec{s}$. Ako rad obavlja sila $\vec{F}$ koja djeluje u smjeru puta $\vec{s}$, onda je rad zadan s (vidi Sliku 14 (lijevo))

$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| = F\,s,$$



Slika 14: Rad sile $\vec{F}$ na putu $\vec{s}$

a ako sila $\vec{F}$ ne djeluje u smjeru puta $\vec{s}$, onda rad obavlja samo komponenta $\vec{F}_s$ sile u smjeru puta $\vec{s}$ (vidi Sliku 14 (desno)), tj.

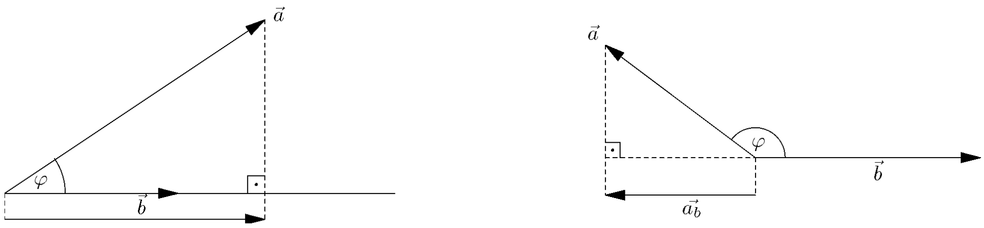
$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_s + \vec{F}_n, \\
W &= \|\vec{F}_s\| \cdot \|\vec{s}\| = (F\cos\varphi)\, s = F\, s\cos\varphi
\end{aligned}$$

Primijetite da je sila $\vec{F}_s$ ortogonalna projekcija sile $\vec{F}$ u smjeru vektora puta $\vec{s}$.

Općenito ćemo projekciju vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ označiti s $\vec{a}_b$. Pod skalarnom projekcijom vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ podrazumijevamo (uz oznaku $a := \|\vec{a}\|$)[6]

$$a_b = a\,\cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Primijetite da broj $a\,\cos\varphi$ može biti pozitivan ($\varphi < \frac{\pi}{2}$) ili negativan ($\varphi > \frac{\pi}{2}$).



Slika 15: Projekcija vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$

Zadatak 27. *Pokušajte geometrijski opravdati niže navedena svojstva projekcije vektora*

a) Projekcija produkta skalara s vektorom jednaka je produktu tog skalara i projekcije vektora

$$(\lambda\,\vec{a})_b = \lambda\vec{a}_b,$$

b) Projekcija zbroja dva vektora jednaka je zbroju projekcija tih vektora

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c.$$

[6]U nekim knjigama se broj a_b naziva "projekcija vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ ([9])"

Definicija 8. Skalarni produkt u $X_0(E)$ je operacija $\cdot\, X_0 \times X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ koja paru vektora $\vec{a}$, $\vec{b} \in X_0$ pridužuje broj (skalar), kojeg ćemo označiti s $\vec{a}\cdot\vec{b}$, tako da je

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}, & \text{ako je } \vec{a}=\vec{0} \text{ ili } \vec{b}=\vec{0}, \\ ab\cos\varphi \in \mathbb{R}, & \text{ako je } \vec{a},\, \vec{b} \neq \vec{0}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{cases}$$

pri čemu je običaj da se i rezultat operacije naziva skalarni produkt.[7]

Koristeći ranije uveden pojam projekcije vektora, skalarni produkt možemo zapisati kao

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\varphi = \begin{cases} a(b\,\cos\varphi) = a\,b_a, \text{ ili} \\ b(a\,\cos\varphi) = b\,a_b. \end{cases}$$

Navedimo neka svojstva skalarnog produkta

1. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (slijedi iz Zadatka 27b)
2. $(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (slijedi iz Zadatka 27a)
3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 \geq 0$ i $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Svojstva 3. i 4. slijede direktno iz Definicije 8.

Primjer 9. *Lako se na osnovi Definicije 8 vidi da vrijedi*

1. $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = a^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$,
2. $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = a^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$,
3. $(\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0})$ $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b}$, $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$
4. $(\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0})$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Primjer 10. (Poučak o kosinusima). *Označimo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i kut φ u kosokutnom trokutu kao na Slici 16. Množeći skalarno vektor*

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

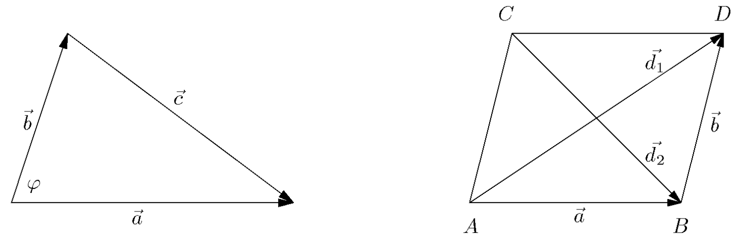
s vektorom $\vec{c}$ dobivamo

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{a}-\vec{b})^2 = a^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2 \\ &= a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2. \end{aligned}$$

Slično pokušajte izvesti formule i za druge stranice kosokutnog trokuta.

Primjer 11. *Treba dokazati da se dijagonale romba raspolavljaju i da su međusobno okomite.*

[7] engl.: scalar (dot) product, njem.: Skalarprodukt (Ineresprodukt)



Slika 16: Slika uz Primjer 10 (lijevo) i Primjer 11 (desno)

1. Iz slike se vidi da je $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$. Skalarni produkt

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2 = 0,$$

   iščezava jer su duljine stranica a, b romba jednake.

2. Primijetite da su pravokutni trokuti $\triangle ASD$ i $\triangle SDC$ sukladni.

Primjer 12. *Načinimo tablicu skalarnog množenja za ortonormiranu bazu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektorskog prostora $X_0(E)$*

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Direktnom provjerom uz korištenje tablice množenja iz *Primjera 12* dobivamo

Teorem 5. *Za vektore*

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\end{aligned}$$

vrijedi formula[8]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{11}$$

Iz definicije skalarnog produkta i norme vektora korištenjem formule (11) dobivamo

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \tag{12}$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a\, b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \tag{13}$$

Primjer 13. *Pokažimo da su dijagonale četverokuta $ABCD$ s vrhovima $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$ međusobno okomite.*

[8] U programskom sustavu *Mathematica* skalarni produkt vektora $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dobivamo naredbom $a\,.\,b$ ili $Dot[a\,.\,b]$, gdje su a, b liste

Kako je $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = -6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$, imamo $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Primjer 14. *Zadan je trokut ABC s vrhovima $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$, $C(3,-2,1)$. Treba odrediti unutrašnji kut tog trokuta pridružen vrhu B.*

Kako je $\overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = 7\vec{i} + \vec{k}$, dobivamo

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Z a d a c i

Zadatak 28. *Pokažite da je zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak dvostrukom zbroju kvadrata duljina njegovih stranica.*
Uputa: stranice i dijagonale paralelograma orijentirajte tako da bude: $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$.

Zadatak 29. *Pokažite da su nasuprotni bridovi pravilnog tetraedra $ABCD$ međusobno okomiti.*
Uputa: primijetite da je kut između susjednih bridova 60^o.

Zadatak 30. *Odredite kut nasuprot osnovice jednakokračnog trokuta ako su težišnice na krakove međusobno okomite.*
Rješenje: $\alpha \approx 37^o$.

Zadatak 31. *Ako je vektor $\vec{a} + 3\vec{b}$ okomit na vektor $7\vec{a} - 5\vec{b}$ i vektor $\vec{a} - 4\vec{b}$ okomit na vektor $7\vec{a} - 2\vec{b}$, odredite kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*
Rješenje: $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$.

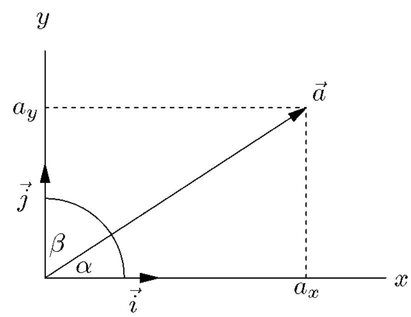
Zadatak 32. *Odredite kut između jediničnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako se zna da su vektori $\vec{a} + 2\vec{b}$ i $5\vec{a} - 4\vec{b}$ međusobno okomiti.*
Rješenje: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 33. *Pokažite da se visine trokuta sijeku u jednoj točki (ortocentar).*

Zadatak 34. *Pokažite da su vektori $\vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c})$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti.*

7.1 Kosinusi smjerova

Promatrajmo najprije vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \in X_0(M)$ u ravnini, koji u pravokutnom koordinatnom sustavu zatvara kut α s pozitivnim smjerim osi x, a kut β s pozitivnim smjerom osi y.



Slika 17: Kosinusi smjerova

Očigledno je

$$a_1 = a\cos\alpha,$$
$$a_2 = a\cos\beta, \qquad \text{(odnosno zbog } \beta = \tfrac{\pi}{2} - \alpha, \quad a_2 = a\sin\alpha),$$

iz čega slijedi

$$a_1^2 + a_2^2 = a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta),$$

odnosno zbog (12)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Primijetite da je $\vec{a}\cdot\vec{i} = a\,\cos\alpha$, pa je $a_1 = \vec{a}\cdot\vec{i}$.

Neka je sada $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$ proizvoljni vektor u prostoru, koji u pravokutnom koordinatnom sustavu zatvara kut α s pozitivnim smjerom osi x, kut β s pozitivnim smjerom osi y i kut γ s pozitivnim smjerom osi z. Množeći redom vektor $\vec{a}$ s baznim vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ dobivamo

$$\vec{a}\cdot\vec{i} = a_1, \qquad \vec{a}\cdot\vec{j} = a_2, \qquad \vec{a}\cdot\vec{k} = a_3,$$

iz čega koristeći definiciju skalarnog produkta dobivamo

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a\cos\alpha \\ a_2 = a\cos\beta \\ a_3 = a\cos\gamma \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{a_1}{a} \\ \cos\beta = \frac{a_2}{a} \\ \cos\gamma = \frac{a_3}{a} \end{array}\right.$$

odnosno

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = 1. \tag{14}$$

7.2 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Skup uređenih n-torki realnih brojeva $\mathbb{R}^n$ možemo interpretirati kao točke u n dimenzionalnom prostoru ili kao radij-vektore. Za dva vektora $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ možemo definirati sljedeće računske operacije.

- Zabrajanje $+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$

- Množenje sa skalarom $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n);$$

Provjerite da skup vektora $\mathbb{R}^n$ snabdjeven ovakvim zbrajanjem i množenjem sa skalarom ima strukturu vektorskog prostora.

U vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ možemo uvesti skalarni produkt $\langle , \rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

čime vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postaje unitarni vektorski prostor.

Euklidska norma $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ vektora $x \in \mathbb{R}^n$ definira se kao

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Euklidsku udaljenost $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ dviju točaka $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ definiramo kao,

$$d(a, b) = \|b - a\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

U ovom kontekstu Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost možemo zapisati na sljedeći način.

Teorem 6. *Za proizvoljne vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\|\|b\|,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori $a, b \in \mathbb{R}^n$ linearno zavisni.

Zadatak 35. *Direktno dokažite Teorem 6 i navedite njegovo geometrijsko značenje.*

Zadatak 36. *Primjenom Teorema 6 dokažite sljedeći korolar i navedite njegovo geometrijsko značenje.*

Korolar 3. *(Hölderova nejednakost) Za proizvoljne vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$ takav da je $b = \lambda a$.

Zadatak 37. *Primjenom Teorema 6 i Korolara 3 dokažite sljedeći korolar i navedite njegovo geometrijsko značenje.*

Korolar 4. *(Nejednakost trokuta) Za proizvoljne točke $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

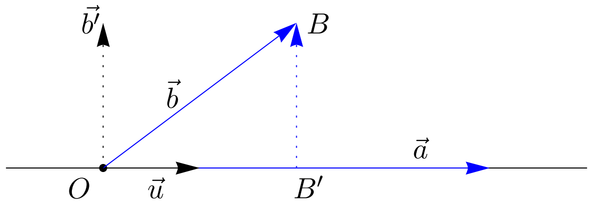
$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b),$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$ takav da je $b = \lambda a$.

8 Projekcija vektora na pravac i ravninu

8.1 Projekcija vektora na pravac

Na pravcu p izaberimo fiksnu točku O i jedinični vektor $\vec{u}$. **Orogonalnu projekciju** $\overrightarrow{OB'}$ vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ na pravac p dobit ćemo tako da ortogonalno proiciramo točku B na pravac p.



Slika 18: Projekcija vektora na pravac

Ako je vektor $\vec{b}$ linearno zavisan s vektorom $\vec{u}$, onda se projekcija vektora $\vec{b}$ podudara sa samim vektorom $\vec{b}$ i vrijedi $\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u}$.

Ako su vektori $\vec{b}$ i $\vec{u}$ linearno nezavisni, onda su vektori $\overrightarrow{OB'}$ i $\vec{u}$ kolinearni, pa postoji $\lambda \in R$, takav da bude

$$\overrightarrow{OB'} = \lambda\, \vec{u}.$$

Iz slike se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} \quad \text{odnosno} \\ &= \lambda\, \vec{u} + \overrightarrow{B'B}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Množeći skalarno ovu jednakost s vektorom $\vec{u}$ i koristeći činjenicu da su vektori $\overrightarrow{B'B}$ i $\vec{u}$ međusobno okomiti, dobivamo

$$\vec{b} \cdot \vec{u} = \lambda.$$

Dakle, orogonalna projekcija $\overrightarrow{OB'}$ vektora $\vec{b}$ na pravac p određen vektorom $\vec{a}$ zadana je s

$$\overrightarrow{OB'} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u}. \tag{16}$$

Primijetite da je vektor $\overrightarrow{B'B}$ okomit na pravac p, a da iz (15) slijedi

$$\vec{b'} := \overrightarrow{B'B} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u}. \tag{17}$$

Primijetite da ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ linearno nezavisni vektori, onda vrijedi

(i) $\vec{b'} \neq \vec{0}$,

(ii) $\vec{b'} \perp \vec{u}$,

(iii) $\vec{b'} \cdot \vec{b} > 0$, tj. kut između vektora $\vec{b'}$ i $\vec{b}$ je šiljasti.

Prve dvije tvrdnje lako se mogu provjeriti. Treća tvrdnja slijedi iz

$$\vec{b'} \cdot \vec{b} = b^2 - (\vec{b} \cdot \vec{u})^2 = b^2 \sin^2 \alpha,$$

gdje je α kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ista tvrdnja može se pokazati i tako da drugu jednadžbu iz (17) pomnožimo s $\vec{b'}$.

Primjedba 8. Neka je $(O; \vec{i}, \vec{j})$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini M. Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora, onda postoje ortonormirani vektori $\vec{u}, \vec{v} \in X_0(M)$,

$$\begin{aligned} &\vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \\ &\vec{v} = \tfrac{\vec{b'}}{\|\vec{b'}\|}, \quad \vec{b'} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u}, \end{aligned} \tag{18}$$

pri čemu vrijedi

(i) $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\, \vec{u}, \qquad \vec{a} \cdot \vec{u} > 0,$

(ii) $\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u} + (\vec{b} \cdot \vec{v})\, \vec{v}, \qquad \vec{b} \cdot \vec{v} > 0.$

Jednakost (i) slijedi iz (18) i činjenice da su $\vec{a}$ i $\vec{u}$ kolinearni vektori jednake orijentacije, pa je $\vec{a} \cdot \vec{u} = \|\vec{a}\|$.

Jednakost (ii) slijedi iz (18) i činjenice da $\vec{b'}$ možemo gledati kao projekciju vektora $\vec{b'}$ na vektor $\vec{v}$. Nadalje, iz (17) slijedi: $\vec{b} \cdot \vec{v} = \vec{b'} \cdot \vec{v} = \|\vec{b'}\| > 0$.

Primjer 15. *Treba odrediti orogonalnu projekciju vektora $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ na pravac određen vektorom $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.*

Dobivamo:

$$\begin{aligned} &\|\vec{a}\| = 5, &&\vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \tfrac{3}{5}\vec{i} + \tfrac{4}{5}\vec{j} \\ &\vec{b} \cdot \vec{u} = 2, &&\overrightarrow{OB'} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u} = 2\vec{u} = \tfrac{6}{5}\vec{i} + \tfrac{8}{5}\vec{j}. \end{aligned}$$

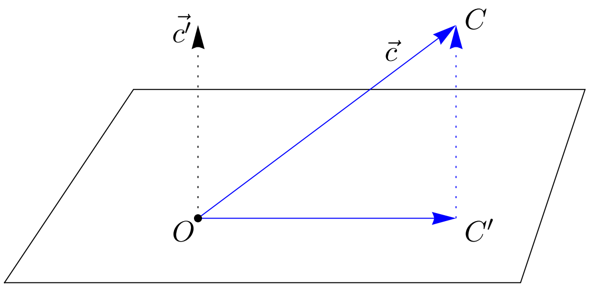
Izračunajte $\|\overrightarrow{B'B}\|$.

8.2 Projekcija vektora na ravninu

Slično kao u prethodnoj točki, u ravnini M izaberimo fiksnu točku O i dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}$. Time smo u ravnini M uveli koordinatni sustav s baznim vektorima $\vec{a}, \vec{b}$. **Ortogonalnu projekciju** $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ na ravninu M dobit ćemo tako da ortogonalno proiciramo točku C na ravninu M.

Ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c}$ prikazat ćemo pomoću vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. U tu svrhu prema *Primjedbi 8* od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ načinit ćemo novu ortonormiranu bazu $\vec{u}$, $\vec{v}$. Vektor $\overrightarrow{OC'}$ prikažimo kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\overrightarrow{OC'} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$



Slika 19: Projekcija vektora na ravninu

Iz slike se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C} \quad \text{odnosno} \\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \overrightarrow{C'C}. \end{aligned} \tag{19}$$

Množeći skalarno ovu jednakost redom s vektorima $\vec{u}$, $\vec{v}$ i koristeći činjenicu da je vektor $\overrightarrow{C'C}$ okomit na vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$, dobivamo

$$\alpha = \vec{c}\cdot\vec{u} \qquad \beta = \vec{c}\cdot\vec{v}.$$

Dakle, orogonalna projekcija $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ na ravninu M može se odrediti iz formule

$$\overrightarrow{OC'} = (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{c}\cdot\vec{v})\vec{v}. \tag{20}$$

Primijetite da je vektor $\overrightarrow{C'C}$ okomit na ravninu M, a da iz (19) slijedi

$$\vec{c'} = \overrightarrow{C'C} = \vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u} - (\vec{c}\cdot\vec{v})\vec{v}. \tag{21}$$

Slično kao u prethodnoj točki, ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ linearno nezavisni vektori, onda vrijedi

(i) $\vec{c'} \neq \vec{0}$,

(ii) $\vec{c'} \perp \vec{u} \quad \& \quad \vec{c'} \perp \vec{v}$,

(iii) $\vec{c'}\cdot\vec{c} > 0$, tj. kut između vektora $\vec{c'}$ i $\vec{c}$ je šiljasti.

U cilju dokaza tvrdnje (iii) iz (21) množeći s $\vec{c'}$, dobivamo

$$\vec{c'}\cdot\vec{c} \overset{(19),(ii)}{=} \|\vec{c'}\|^2 \overset{(i)}{>} 0$$

Primjer 16. *Treba odrediti ortogonalnu projekciju vektora* $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ *na ravninu određenu vektorima* $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$.

Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\|\vec{a}\| = \sqrt{5}, && \vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \tfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}\\
&\vec{b}' = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u} = -\tfrac{6}{5}\vec{\imath} + \tfrac{12}{5}\vec{\jmath}\\
&\|\vec{b}'\| = \tfrac{6}{\sqrt{5}}, && \vec{v} = \tfrac{\vec{b}'}{\|\vec{b}'\|} = -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}\\
&\overrightarrow{OD'} = (\vec{d}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{d}\cdot\vec{v})\vec{v} = \tfrac{2}{5}\vec{\imath} + \tfrac{16}{5}\vec{\jmath}.
\end{aligned}$$

9 Gram – Schmidtov postupak ortogonalizacije

Neka je $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru. Na osnovi razmatranja u prethodnoj točki možemo ustanoviti da je za dani skup linearno nezavisnih vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in X_0(E)$ moguće definirati ortonormiranu bazu $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ u X_0, gdje je

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|},\\
&\vec{v} = \tfrac{\vec{b}'}{\|\vec{b}'\|}, \quad \vec{b}' = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u},\\
&\vec{w} = \tfrac{\vec{c}'}{\|\vec{c}'\|}, \quad \vec{c}' = \vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u} - (\vec{c}\cdot\vec{v})\vec{v}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Zbog toga i vektore $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ možemo prikazati u bazi $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, pri čemu su kutevi između vektora $\angle(\vec{a},\vec{u})$, $\angle(\vec{b},\vec{v})$, $\angle(\vec{c},\vec{w})$ šiljasti i vrijedi

$$\begin{aligned}
&\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{u})\,\vec{u}, && (\vec{a}\cdot\vec{u}) > 0\\
&\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{b}\cdot\vec{v})\,\vec{v}, && (\vec{b}\cdot\vec{v}) > 0\\
&\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{c}\cdot\vec{v})\,\vec{v} + (\vec{c}\cdot\vec{w})\,\vec{w}, && (\vec{c}\cdot\vec{w}) > 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Prva formula u (23) slijedi iz prve formule u (22) i činjenice da su $\vec{a}$ i $\vec{u}$ kolinearni vektori jednake orijentacije, zbog čega je

$$(\vec{a}\cdot\vec{u}) = \|\vec{a}\| > 0.$$

Druga formula u (23) slijedi iz druge formule u (22) i činjenice da je $\vec{b}'$ projekcija vektora $\vec{b}$ na u smjeru vektora $\vec{v}$. Nadalje,

$$\vec{b}\cdot\vec{v} = \vec{b}'\cdot\vec{v} = \|\vec{b}'\| > 0.$$

Treća formula u (23) slijedi iz treće formule u (22) i činjenice da je $\vec{c}'$ projekcija vektora $\vec{c}$ u smjeru vektora $\vec{w}$. Nadalje,

$$\vec{c}\cdot\vec{w} = \vec{c}'\cdot\vec{w} = \|\vec{c}'\| > 0.$$

U programskom sustavu *Mathematica* načinit ćemo modul $GS[a,b,c]$ koji će prethodno opisanim Gram – Schmidtovim postupkom ortogonalizacije od zadanih linearno nezavisnih vektora $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ sagraditi ortonormirani sustav $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$

```
In[1]:= GS[a_, b_, c_]:= Module[{u, v, w},
                        u = a/Norm[a];
                           v = b - (b . u) u; v = v/Norm[v];
                              w = c - (c . u) u - (c . v) v;
                              w = w/Norm[w];
                        {u, v, w}]
```

Tako primjerice za vektore

$$\vec{a} = 2\vec{i}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

modul *GS* daje

$$\vec{u} = \vec{i}, \quad \vec{v} = \vec{j}, \quad \vec{w} = \vec{k},$$

a za vektore

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{b} = 6\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{c} = 2\vec{j} + 4\vec{k},$$

modul *GS* daje

$$\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}, \quad \vec{v} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}, \quad \vec{w} = \vec{k}.$$

10 Determinante drugog i trećeg reda

Za nekoliko sljedećih pojmova vezano uz vektore u ravnini i prostoru nužno je potreban pojam determinante matrice drugog, odnosno trećeg reda. Zato najprije uvodimo ovaj pojam promatrajući sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{24}$$

Koeficijente uz nepoznanice a_{ij} možemo zapisati u obliku tablice, koju nazivamo **matrica sustava** – u ovom slučaju matrica drugog reda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Primijetite da prvi indeks i koeficijenta a_{ij} označava redak matrice (redni broj jednadžbe), a drugi indeks j označava stupac matrice (redni broj nepoznanice) u kome se element nalazi.

Sustav ćemo riješiti metodom suprotnih koeficijenata. Množeći prvu jednadžbu sustava (24) brojem a_{22}, a drugu brojem $(-a_{12})$, nakon zbrajanja tako pomnoženih jednadžbi dobivamo

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{25}$$

Ako sada prizvoljnoj matrici A pridružimo broj $\det A$ na sljedeći način

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{26}$$

onda (25) možemo zapisati

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \text{odnosno} \quad Dx_1 = D_1, \tag{27}$$

pri čemu broj $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ zovemo **determinanta sustava**. Pokušajte sami slično dobiti da je

$$Dx_2 = D_2 \qquad \text{gdje je} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{28}$$

Uređen par $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ je rješenje sustava (24). Iz (27) i (28) možemo zaključiti:

- ako je $D \neq 0$, sustav (24) ima jedinstveno rješenje
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}; \tag{29}$$
- ako je $D = 0$ i $D_1 = D_2 = 0$, sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja;
- ako je $D = 0$, a pri tome barem jedan od brojeva D_1, D_2 različit od nule, sustav nema rješenja.

Zadatak 38. *Prethodno navedene tvrdnje u literaturi su poznate kao* **Cramerovo pravilo**. *Pokušajte dati njihovu geometrijsku interpretaciju.*

Primjer 17. *Primjenom Cramerovog pravila diskutirat ćemo sljedeći sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 + \lambda x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Dobivamo

$$D = \lambda^2 - 9, \quad D_1 = \lambda - 3, \quad D_2 = \lambda - 3.$$

Prema Cramerovom pravilu sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = x_2 = \frac{1}{\lambda+3}$ za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, za $\lambda = 3$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja leže na pravcu $3x_1 + 3x_2 = 1$, a za $\lambda = -3$ sustav nema rješenja.

Pod determinantom matrice drugog reda možemo podrazumijevati funkciju koja svakoj kvadratnoj matrici A drugog reda pridružuje realan broj $\det A$ definiran s (26). Uobičajeno je da se i vrijednost te funkcije također naziva determinanta matrice. Istaknimo posebno sljedeća svojstava determinante matrice definirane s (26):

1. ako dva retka (odnosno stupca) determinante promijene mjesta, determinanta mijenja predznak;

2. determinantu množimo brojem tako da bilo koji redak ili stupac pomnožimo tim brojem;

3. ako bilo koji redak (odnosno stupac) determinante, prethodno pomnožen nekim brojem, dodama nekom drugom retku (odnosno stupcu), determinanta ne mijenja vrijednost.

Sva navedena svojstava lako se provjeravaju na osnovi definicije (26). Također vrijede i sljedeća svojstva

1. $$\det A^T = \det A, \quad \text{gdje je} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

   Matrica A^T, koja se dobije zamjenom redaka i stupaca u matrici A naziva se transponirana matrica.

2. ako su svi elementi nekog retka (odnosno stupca) determinante jednaki nuli, njezina vrijednost jednaka je nuli;

3. ako determinana ima dva jednaka retka (odnosno stupca), njezina vrijednost jednaka je nuli;

4. ako su retci (odnosno stupci) determinante linearno zavisni, njezina vrijednost jednaka je nuli;

5. ako se dvije determinante razlikuju samo u elementima jednog retka (odnosno stupca), mogu se zbrojiti na sljedeći način

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Slično kao što smo uveli pojam matrice (odnosno determinante) drugog reda, možemo promatrati i matrice (odnosno determinate) trećeg (ili općenito n-tog reda)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

pri tome vrijednost determinante dobivamo snižavanjem reda primjenom tzv. **Laplaceovog razvoja** determinante po elementima nekog retka ili stupca (detaljnije vidi u [9]):

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \qquad &\text{(razvoj po elementima } i\text{-tog retka)} \\ \det A &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \qquad &\text{(razvoj po elementima } j\text{-tog stupca)} \end{aligned} \tag{30}$$

gdje je A_{ij} tzv. algebarski komplement ili kofaktor determinante, a definira se kao

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

gdje je M_{ij} subdeterminanta (ili minor) elementa a_{ij}, koja se od determinante $\det A$ dobiva ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Primjer 18. *Laplaceovim razvojem po elementima 2-og retka sljedeće determinante, dobivamo*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Provjerite da bi se isti rezultat dobio ako bi primijenili Laplaceov razvoj determinante po nekom drugom retku ili stupcu.

Primjedba 9. Može se pokazati (vidi primjerice [9]) da i za determinante trećeg reda također vrijede sva svojstva koja su navedena za determinante drugog reda. Primijetite da bi se računanje vrijednosti determinante znatno pojednostavilo kad bi se u nekom retku ili stupcu pojavilo više nula, što možemo postići primjenom spomenutih svojstava. Tako primjerice ako bi u prethodnoj determinanti treći redak dodali prvom retku, determinanta nebi promijenila vrijednost, ali bi izračunavanje njene vrijednosti razvojem po elementima prvog retka ili drugog stupca bilo puno brže

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\text{odnosno } (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) = 6.$$

Primjedba 10. Može se pokazati (vidi primjerice [9]) da se Cramerovo pravilo može analogno primijeniti i za rješavanje sustava od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice, ali također i za rješavanje većih kvadratnih sustava linearnih jednadžbi. Pri tome ova metoda ima samo teorijsku vrijednost jer je njena efikasnost vrlo niska.

Niže navedenim *Mathematica*-programom izračunava se vrijednost determinante n-tog reda čiji su elementi slučajni realni brojevi na intervalu $[0, 100]$ i pri tome se mjeri vrijeme rada računala.

```
In[1]:=n = 3;
        a = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n}, {j, n}];
              Timing[Det[a]]
```

Zadatak 39. *Primjenom Cramerovog pravila riješite sljedeći sustav*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= -4 \\ 4x_1 = 7x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Rješenje: $D = -2, \quad D_1 = 168, \quad D_2 = 93, \quad D_3 = -31, \quad x_1 = 84, \quad x_2 = -\frac{93}{2}, \quad x_3 = \frac{31}{2}$.

Primjedba 11. Linearnu zavisnost vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ na vektorskom prostoru X_0, na kome je definiran skalarni produkt, možemo ispitati na sljedeći način. Množenjem jednakosti

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

redom vektorima $\vec{a}_k$, $k = 1, \ldots, n$ dobivamo sustav linearnih jednadžbi s matricom sustava

$$G(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \begin{bmatrix} (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{a}_n \cdot \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_n \cdot \vec{a}_n) \end{bmatrix}$$

Matricu G zovemo Gramova matrica. Može se pokazati da je skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno nezavisan onda i samo onda ako je $\det(G) \neq 0$. Obrazložite ovu tvrdnju za slučaj $n = 2$, odnosno $n = 3$.

Zadatak 40. *Na osnovi* Primjedbe 11 *ispitajte linearnu zavisnost vektora* $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, b = \vec{i} + 2\vec{k}, \vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} \in X_0(E)$.
Rješenje: *Budući da je* $\det(G) = 9$, *vektori su linearno nezavisni.*

11 Orijentacija koordinatnog sustava

Neka su $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ i $\left(O'; \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ dva pravokutna koordinatna sustava u prostoru, pri čemu su $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, odnosno $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ njihove ortonormirane baze. Kažemo da su navedeni sustavi **jednako orijentirani** ako postoji kruto gibanje koje točku O prevodi u točku O', a vektore $\vec{e}_i$ u odgovarajuće vektore $\vec{f}_j$ za $i, j = 1, 2, 3$. Na taj način skup svih pravokutnih koordinatnih sustava u prostoru dijeli se na dva disjunktna skupa. Sve koordinatne sustave koji su jednako orijentirani kao i sustav $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, gdje se smjer vektora $\vec{k}$ dobija **pravilom desnog vijka** zvat ćemo **desni koordinatni sustavi**, a one druge, **lijevi koordinatni sustavi**.

Navedimo jedan kriterij (vidi [11]) na osnovi kojeg možemo ustanoviti jesu li sustavi $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ i $\left(O'; \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ jednako ili suprotno orijentirani. Budući da je $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ baza u prostoru, onda svaki od vektora $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ možemo na jedinstven način prikazati u toj bazi

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3\\ \vec{f}_2 &= a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3\\ \vec{f}_3 &= a_3\vec{e}_1 + b_3\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

S D označimo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Može se pokazati da je uvijek $D \neq 0$. Ako je $D > 0$, navedeni sustavi su jednako orijentirani, a ako je $D < 0$, sustavi su suprotno orijentirani.

Slično, dva koordinatna sustava u ravnini $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ i $\left(O'; \vec{f}_1, \vec{f}_2\right)$ su jednako (odnosno suprotno) orijentirana ako je $D > 0$ (odnosno $D < 0$), gdje je

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2\\ \vec{f}_2 &= a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2\end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix},$$

i također dva koordinatna sustava na pravcu $(O; \vec{e}_1)$ i $\left(O'; \vec{f}_1\right)$ su jednako (odnosno suprotno) orijentirana ako je $D > 0$ (odnosno $D < 0$), gdje je $\vec{f}_1 = D\vec{e}_1$.

Primjer 19. *Sustavi* $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *i* $\left(O; \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\right)$ *jednako su orijentirani, a sustavi* $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *i* $\left(O; \vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\right)$ *suprotno.*

Naime, u prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned}\vec{j} &= 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}\\ \vec{k} &= 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}\\ \vec{i} &= 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}\end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = 1 > 0.$$

a u drugom

$$\begin{aligned}\vec{j} &= 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}\\ \vec{i} &= 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}\\ \vec{k} &= 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}\end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -1 < 0.$$

12 Vektorski produkt

Definicija 9. Vektorski produkt dva nenulvektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$ je vektor $\vec{c} \in X_0(E)$ koji označavamo[9] s $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, a koji ima sljedeća svojstva:

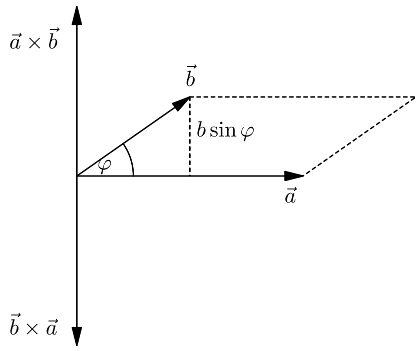
(i) norma vektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ jednaka je površini paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj.

$$c = \left(\|\vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\|\right) = a \cdot b \sin\varphi, \qquad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b});$$

(ii) vektor $\vec{c}$ okomit je na ravninu određenu vektorima $\vec{a}, \vec{b}$;

(iii) smjer (orijentacija) vektora $\vec{c}$ određen je pravilom desnog vijka

Ako je jedan od vektora $\vec{a}, \vec{b}$ nulvektor, vektor $\vec{c}$ također je nulvektor.



Slika 20: Vektorski produkt

Primijetite da je vektorski produkt binarna operacija $\times : X_0(E) \times X_0(E) \to X_0(E)$, ali je uobičajeno da se i rezultat ove binarne operacije naziva vektorski produkt. Iz prethodne definicije neposredno slijede sljedeća svojstava vektorskog produkta[10]:

1^o	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	antikomutativnost
2^o	$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$	homogenost
3^o	$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$	distributivnost s desna
	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	distributivnost s lijeva

Primjer 20. *Iz definicije vektorskog produkta neposredno slijedi tvrdnja da su nenul vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$* **kolinearni** *onda i samo onda ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.*

Primjer 21. *Koristeći Pitagorin teorem za trigonometrijske funkcije:* $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, *lako se pokaže da vrijedi formula, koja povezuje vektorski i skalarni produkt*

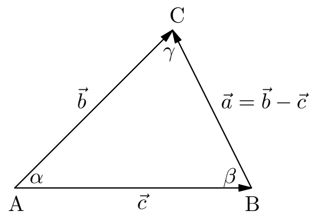
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = a^2 \cdot b^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$

[9] engl.: cross product, vector product   njem.: Vektorprodukt, Kreuzprodukt

[10] Dokaz svojstav 3^o nije trivijalan, a može se vidjeti u *Dodatku 5* u [9]

Primjer 22. (Poučak o sinusima) *U kosokutnom trokutu sa stranicama a, b, c i odgovarajućim kutovima nasuprot njih α, β, γ vrijedi*

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \qquad \textit{odnosno} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Slika 21: Poučak o sinusima

Ako stranice trokuta orijentiramo kao na slici, vrijedi

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}. \qquad (*)$$

Množeći vektorski s desna ovu jednakost vektorom $\vec{c}$ dobivamo

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} - \vec{c} \times \vec{c}.$$

Kako je $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$, računajući norme vektora na lijevoj i desnoj strani, dobivamo

$$\|\vec{a} \times \vec{c}\| = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \Longrightarrow a\,\sin(\pi - \beta) = b\,\sin\alpha.$$

Kako je (koristeći primjerice adicioni teorem za trigonometrijsku funkciju sinus) $\sin(\pi - \beta) = \sin\beta$, dobivamo

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta. \qquad (**)$$

- Množeći vektorski s desna jednakost $(*)$ vektorom $\vec{b}$ na sličan način pokažite da vrijedi
$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma. \qquad (***)$$
- Koristeći jednakosti $(**)$ i $(***)$ pokažite da vrijedi i treći omjer
$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma.$$

Primjer 23. *Načinimo tablicu množenja (vektorski produkt) za ortonormiranu bazu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektorskog prostora $X_0(E)$.*

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Teorem 7. *Za vektore* $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$ *zadane u pravokutnom koordinatnom sustavu* $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi formula[11]

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{31}$$

<u>Dokaz</u>. Primjenom tablice množenja iz prethodnog primjera dobivamo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right) \times \left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) \\ &= -a_2b_1\vec{k} + a_3b_1\vec{j} + a_1b_2\vec{k} - a_3b_2\vec{i} - a_1b_3\vec{j} + a_2b_3\vec{i} \\ &= \vec{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}\,(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{k}\,(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

iz čega neposredno slijedi formula (31) ♣

13 Mješoviti produkt

Mješoviti produkt tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ je realni broj koji označavamo

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{32}$$

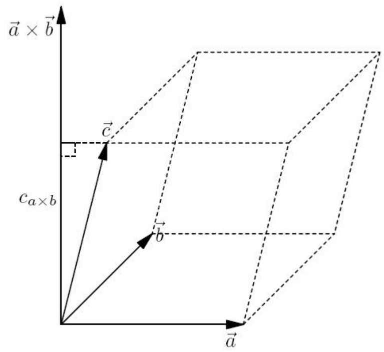
Pokušajmo geometrijski interpretirati mješoviti produkt. Pretpostavimo da su zadana tri linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ kao na slici.

Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je vektor okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a njegova duljina (norma) jednaka je površini paralelograma kojeg određuju ti vektori. Skalarni produkt naznačen u (32) možemo shvatiti kao produkt norme vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ (tj. površine paralelograma) i projekcije vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Ovu projekciju možemo shvatiti kao visinu paralelepipeda određenog vektorma $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, a onda mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ predstavlja (do na predznak) volumen tog paralelepipeda.

Iz prethodne definicije i njene geometrijske interpretacije neposredno slijedi da svaka ciklička promjena redosljeda vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne mijenja vrijdnost njihovog mješovitog produkta:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).$$

[11] U programskom sustavu *Mathematica* vektorski produkt dobivamo naredbom `Cross[a, b]`, gdje su a, b liste



Slika 22: Mješoviti produkt

S druge strane, svaka neciklička promjena redosljeda vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mijenja predznak njihovog mješovitog produkta.

Primjer 24. *Iz definicije mješovitog produkta i njene geometrijske interpretacije neposredno slijedi tvrdnja da su tri vektora* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **komplanarni** *onda i samo onda ako je* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Teorem 8. *Za vektore* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ *zadane u pravokutnom koordinatnom sustavu* $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$*:*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \\ \vec{c} &= c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi formula

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Dokaz. Na osnovi definicija za skalarno i vektorsko množenje vektora dobivamo

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \left(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Sukcesivnom izmjenom prvog i drugog, te drugog i trećeg retka ove determinante, dobivamo traženu formulu (33). Sjetite se da svaka izmjena redaka determinante mijenja njezin predznak. ♣

14 Višestruki produkt

Pod **višestrukim vektorsko – vektorskim produktom** tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ podrazumijevamo produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ili $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Odmah primijetimo da za višestruki produkt ne vrijedi zakon asocijativnosti

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

Ako je primjerice

$$\vec{a} = \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{k},$$

onda vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{j} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Zadatak 41. *Pokažite da za tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ vrijedi formula*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{34}$$

Uputa: Ako stavimo $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$, direktnim izračunavanjem lijeve i desne strane dobivamo traženu formulu.

Cikličkom promjenom vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u (34) dobivamo još dvije formule

$$\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \tag{35}$$

$$\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} \tag{36}$$

Zbrajanjem jednakosti (34, 35, 36) dobivamo poznati **Jacobijev identitet**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}. \tag{37}$$

Stavimo li u (34) $\vec{c} = \vec{a} \neq \vec{0}$, dobivamo formulu

$$\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2}\vec{a} + \frac{1}{a^2}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}). \tag{38}$$

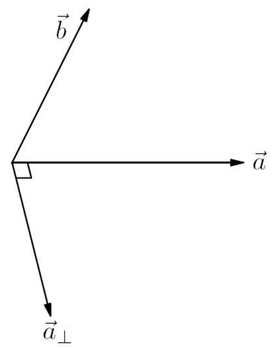
Kako je vektor $\vec{a}_\perp = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$ okomit na vektor $\vec{a}$, onda formula (38) daje prikaz vektora $\vec{b}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i vektora $\vec{a}_\perp$ okomitog na vektor $\vec{a}$. Posebno će nam biti interesantan slučaj kada je $\vec{a} := \vec{u}$ jedinični vektor. Tada prethodna formula postaje jednostavnija

$$\vec{b} = (\vec{u} \cdot \vec{b})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{b} \times \vec{u}). \tag{39}$$

Prvi vektor na desnoj strani prepoznajemo kao projekciju vektora $\vec{b}$ na pravac određen jediničnim vektorom $\vec{u}$ (vidi (17), str. 26). Drugi vektor prema (34) možemo zapisati kao

$$\vec{u} \times (\vec{b} \times \vec{u} = \vec{b} - (\vec{b}\vec{u})\vec{u} =: \vec{b}'.$$

Vektor $\vec{b}'$ prpoznajemo kao projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{u}_\perp$, koji je okomit na vektor $\vec{u}$ (vidi (18)).



Slika 23: Prikaz vektora $\vec{b}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i vektora $\vec{a}_{\perp}$

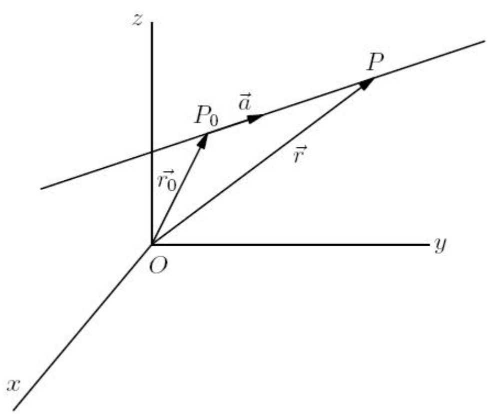
15 Pravac i ravnina u prostoru

15.1 Pravac u prostoru

Neka je $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru. Pravac p u prostoru može biti zadan

(i) točkom $P_0 \in E$ i vektorom $\vec{a} \in X_0(E)$ ili

(ii) s dvije točke $P_0, P_1 \in E$.



Slika 24: Zadavanje pravca u prostoru s točkom $P_0 \in E$ i vektorom $\vec{a} \in X_0(E)$

(i) Neka je zadana točka $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ s radijvektorom $\vec{r}_0$ i vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$. Pravac p definirat ćemo kao skup svih točaka $P \in E$, čiji radij vektor $\vec{r}$ možemo zapisati kao

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

Prikaz (40) obično zovemo **parametarski oblik jednadžbe pravca** p. U koordinatnom obliku to je

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 \end{aligned} \tag{41}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo **kanonski oblik jednadžbe pravca** p

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, \qquad a_1, a_2, a_3 \neq 0. \tag{42}$$

Primjer 25. *Ako je $a_3 = 0$, onda iz (41) slijedi*

$$z = z_0.$$

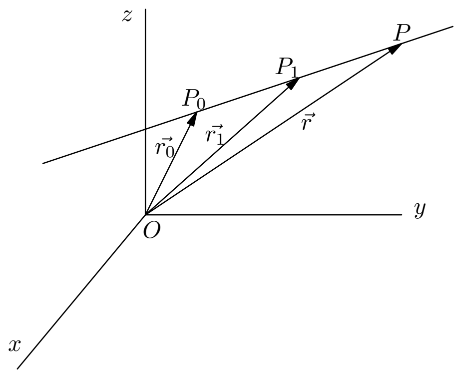
To znači da sve točke pravca p imaju istu aplikatu z_0, odnosno da je pravac paralelan s (x, y)-ravnine.

Primjer 26. *Ako je $a_2 = a_3 = 0$, onda iz (41) slijedi*

$$y = y_0, \qquad z = z_0.$$

To znači da sve točke pravca p imaju istu ordinatu y_0 i aplikatu z_0, odnosno da je pravac paralelan s osi x.

(ii) Pretpostavimo da su zadane dvije različite točke $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E$.



Slika 25: Zadavanje pravca u prostoru s dvije točke $P_0, P_1 \in E$.

Uz oznaku $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$ ponovo smo u situaciji opisanoj pod (i). Ako s $\vec{r_0}$ označimo radij-vektor točke P_0, a s $\vec{r_1}$ radij-vektor točke P_1, tada je $\vec{a} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$, pa **parametarski oblik jednadžbe pravca** p u ovom slučaju glasi

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda(\vec{r_1} - \vec{r_0}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z &= z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{aligned} \tag{44}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo **kanonski oblik jednadžbe pravca** p, koji prolazi točkama $P_0, P_1 \in E$

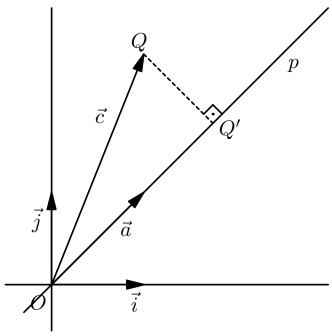
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \qquad x_1 \neq x_0, \quad y_1 \neq y_0, \quad z_1 \neq z_0. \tag{45}$$

Zadatak 42. *Kako glasi jednadžba pravca određenog s dvije točke $P_0, P_1 \in E$, koje*
a) leže u ravnini paralelnoj nekoj od koordinatnih ravnina?
a) leže na pravcu paralelnom nekoj od koordinatnih osi?

Primjer 27. *Pravac p prolazi ishodištem O pravokutnog koordinatnog sustava $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ i zadan je vektorom $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Treba izračunati udaljenost točke $Q = (1, 3, 0)$ do pravca p.*

Označimo s $\vec{u}$ jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$ i $\vec{c} := \overrightarrow{OQ}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{OQ} = \vec{i} + 3\vec{j}.$$



Slika 26: Udaljenost točke do pravca kroz ishodište

Neka je Q' ortogonalna projekcija točke Q na pravac p (određen vektorom $\vec{a}$, tj. jediničnim vektorom $\vec{u}$). Prema (17) str. 26 udaljenost $d(Q', Q)$ točke Q do točke Q' određena je normom vektora

$$\overrightarrow{Q'Q} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}.$$

Kako je

$$\vec{c} \cdot \vec{u} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \qquad (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j},$$

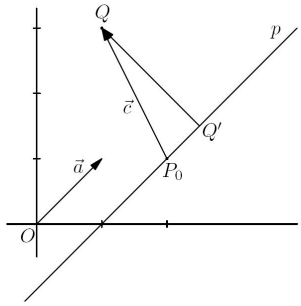
imamo

$$\overrightarrow{Q'Q} = -\vec{i} + \vec{j}, \qquad d(Q', Q) = \|\overrightarrow{Q'Q}\| = \sqrt{2}.$$

Primjer 28. *Pravac p prolazi točkom* $P_0 = (2, 1, 0) \in E$ *i zadan je vektorom* $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. *Treba izračunati udaljenost točke* $Q = (1, 3, 0)$ *do pravca p.*

Označimo s $\vec{u}$ jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$, a s $\vec{c} := \overrightarrow{P_0Q}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0} = -\vec{i} + 2\vec{j}.$$



Slika 27: Udaljenost točke do pravca

Neka je Q' ortogonalna projekcija točke Q na pravac p (određen vektorom $\vec{a}$, tj. jediničnim vektorom $\vec{u}$). Prema (17) str. 26 udaljenost $d(Q', Q)$ točke Q do dočke Q' određena je normom vektora

$$\overrightarrow{Q'Q} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}.$$

Kako je

$$\vec{c} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j},$$

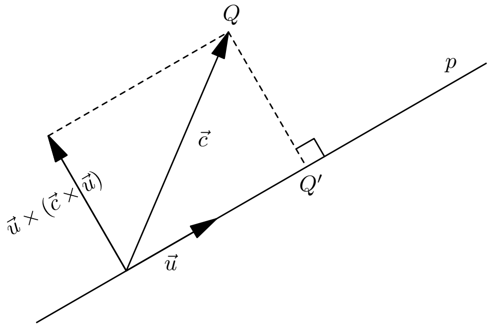
imamo

$$\overrightarrow{Q'Q} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}, \qquad d(Q', Q) = \|\overrightarrow{Q'Q}\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Isti problem možemo riješiti primjenom formule (39) str. 40:

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u})$$

Pri tome



Slika 28: Udaljenost točke do pravca primjenom formule (39)

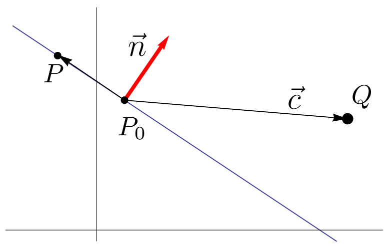
- $(\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}$ je projekcija vektora $\vec{c}$ na pravac p (vidi također (17), str. 26);
- vektor $\vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u})$ je okomit na $\vec{u}$ i jednak vektoru $\overrightarrow{Q'Q}$, a njegova duljina predstavlja udaljenost točke Q do pravca p. Kako je $\vec{u} \perp (\vec{c} \times \vec{u})$, imamo

$$d(Q, p) = \|\vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u})\| = \|\vec{c} \times \vec{u}\|.$$

Zadatak 43. *Na osnovi ovog pristupa izradite* Primjer 27 *i* Primjer 28*.*

15.2 Ravnina u prostoru

Primjer 29. *Neka je $(O; \vec{i}, \vec{j})$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini u kome je pomoću točke $P_0 = (x_0, y_0)$ i normale $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ zadan pravac p. Napist ćemo jednadžbu tog pravca i izvesti formulu za udaljenost točke $Q = (x_Q, y_Q)$ do pravca p.*



Slika 29: Udaljenost točke do pravca

Neka je $P = (x, y)$ proizvoljna točka na pravcu p. Tada su vektori $\overrightarrow{P_0P}$ i $\vec{n}$ okomiti, tj.

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0,$$

iz čega dobivamo jednadžbu pravca p

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

odnosno

$$ax + by + c = 0, \qquad c = ax_0 + by_0.$$

U cilju određivanja udaljenosti točke Q do pravca p, primjenom formule (39), str. 40 vektor $\vec{c}$ rastavit ćemo u smjeru jediničnog vektora

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

i okomito na njega

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0 + \vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0).$$

Tako dobivamo

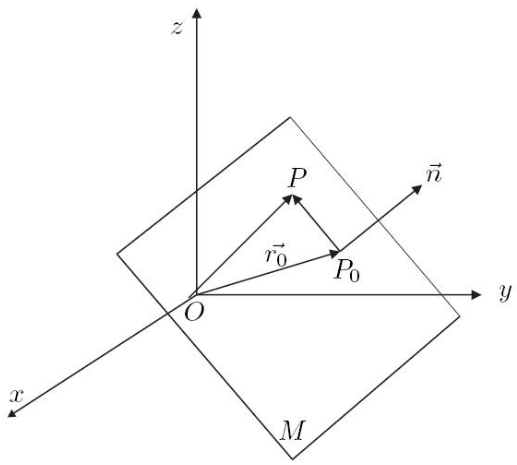
$$d(Q,p) = \|(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)\vec{n}_0\| = |(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)| = \frac{|a(x_Q - x_0) + b(y_Q - y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Primjerice za pravac $3x + 4y - 1 = 0$ i točku $Q = (1,1)$ dobivamo $d(Q,p) = \frac{4}{5}$.
Specijalno, ako je pravac p zadan u eksplicitnom obliku $y = kx + l$, dobivamo

$$d(Q,p) = \frac{|kx_Q + l - y_Q|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

* * * * *

Prijeđimo sada na odrđivanje opće jednadžbe ravnine u prostoru i udaljenosti neke točke Q do ravnine. Neka je $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ točka koja leži u ravnini M, a $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \neq \vec{0}$ normala na nju.



Slika 30: Zadavanje ravnine u prostoru

Tada je za svaku točku $P = (x,y,z) \in M$ vektor $\overrightarrow{P_0P}$ okomit na normalu $\vec{n}$, tj. vrijedi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

odnosno

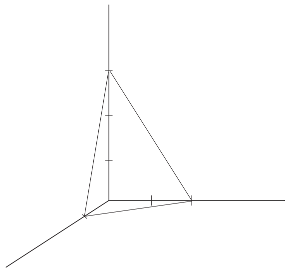
$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \text{gdje je} \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0. \tag{46}$$

Jednadžbu (46) zovemo **opća jednadžba ravnine** zadane točkom P_0 i normalom $\vec{n}$.

Ako je $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$, onda jednadžba (46) prelazi u **segmentni oblik jednadžbe ravnine**

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \qquad \text{gdje je} \quad p = -\frac{D}{A}, \quad q = -\frac{D}{B}, \quad r = -\frac{D}{C}. \tag{47}$$

Primjer 30. *Zadana je opća jednadžba ravnine* $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. *Njezin segmentni oblik je* $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, *a odgovarajuća ravnina prikazana je na Slici 31.*



Slika 31: Ravnina $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

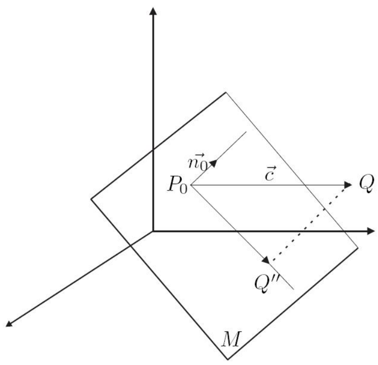
15.3 Projekcija vektora na ravninu i udaljenost točke do ravnine

Neka je $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ točka u ravnini M, a $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normala na nju. Neka je nadalje $\vec{n}_0$ jedinični vektor u smjeru normale, a $Q \in E$ točka izvan ravnine M. Označimo $\vec{c} := \overrightarrow{P_0Q} \in X_0(E)$.

Prema (39) str. 40 vektor $\vec{c}$ rastavit ćemo na dva vektora: jedan u smjeru normale $\vec{n}$, a drugi okomito na nju (leži u ravnini M!):

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0 + \vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0), \qquad \vec{n}_0 = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{48}$$

pri čemu je



Slika 32: Udaljenost točke Q do ravnine M

- $(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0$ projekcija vektora $\vec{c}$ na normalu određenu vektorom $\vec{n}_0$;
- $\|(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0\| = |(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)|$ je udaljenost točke Q do ravnine M;
- $\vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0)$ projekcija vektora $\vec{c}$ na ravninu M;
- $\|\vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0)\| = \|\vec{c} \times \vec{n}_0\|$ je udaljenost točke Q do normale ($\vec{n}_0 \perp (\vec{c} \times \vec{n}_0)$).

Neka je $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ i $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Tada je $\vec{c} = \overrightarrow{P_0Q} = (x_Q - x_0)\vec{i} + (y_Q - y_0)\vec{j} + (z_Q - z_0)\vec{k}$, a udaljenost točke Q do ravnine M zadana je s

$$d(Q, M) = |(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)| = \frac{|A(x_Q - x_0) + B(y_Q - y_0) + C(z_Q - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{49}$$

gdje je $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Primjer 31. *Izračunajmo udaljenost ishodišta $O = (0, 0, 0)$ pravokutnog koordinatnog sustava do ravnine zadane jednadžbom $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.*

Imamo

$$d(O, M) = \frac{|6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6}{7}.$$

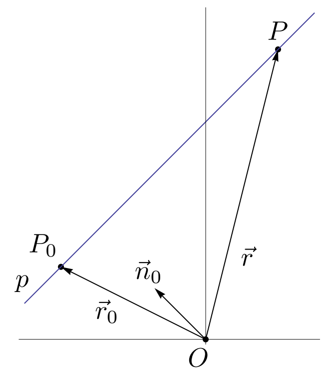
16 Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca i ravnine

16.1 Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca u ravnini

Neka je $(O; \vec{i}, \vec{j})$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini i $\vec{n}_0$ jedinični vektor koji s pozitivnim smjerom osi x zatvara kut α

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}.$$

Nekom točkom P_0 i vektorom $\vec{n}_0$ potpuno je određen pravac p koji je okomit na vektor $\vec{n}_0$ i prolazi točkom P_0 (Slika 33).



Slika 33: Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca u ravnini

Označimo s $\vec{r}_0$ radij vektor točke P_0. Neka je nadalje $P = (x, y)$ proizvoljna točka na pravcu, a $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ njezin radij vektor. Vektor $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ okomit je na normalu $\vec{n}_0$, pa vrijedi

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}_0 = 0, \tag{50}$$

odnosno

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0,$$

odakle uz oznaku

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = (r_0)_{n0} =: \delta,$$

dobivamo **Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca**

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0. \tag{51}$$

Primijetite da apsolutna vrijednost $|\delta|$ predstavlja udaljenost ishodišta O do pravca p.

Obratno, ako je zadan pravac p u ravnini

$$ax + by - c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \tag{52}$$

onda na jedinstven način možemo izabrati vektor $\vec{n}_0$ i točku $T_0 \in p$ s radijvektorom $\vec{r}_0$ tako da je s

$$\delta := \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 > 0,$$

određena udaljenost pravca p do ishodišta O.

Pretpostavimo da je $c > 0$ (ako nije, jednadžbu (52) pomnožimo s (-1)) i jednadžbu (52) podijelimo s $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dobivamo

$$a_1 x + b_1 y - c_1 = 0, \qquad a_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad b_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad c_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 0, \tag{53}$$

pri čemu je $a_1^2 + b_1^2 = 1$. Zato postoji $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\delta > 0$, tako da bude

$$\tfrac{a}{\sqrt{a^2+a^2}} = \cos \alpha, \quad \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha, \qquad \tfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \delta > 0,$$

a jednadžbu (52), možemo zapisati u Hesseovom normalnom obliku (51).

Zadatak 44. *Pravac p zadan je u Hesseovom normalnom obliku točkom P_0 i normalom $\vec{n}_0$, koja s vektorom $\vec{i}$ (pozitivnim smjerom osi x) zatvara kut α. Ustanovite odnos kuta α i kuta ϑ što ga pravac p zatvara s pozitivnim smjerom osi x.*

16.1.1 Udaljenost točke do pravca

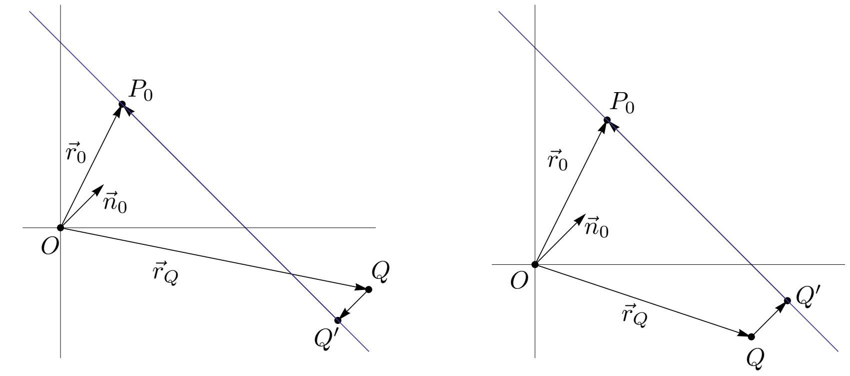
Jednadžba pravca p u Hesseovom normalnom obliku zadana je točkom P_0 i normalom $\vec{n}_0$. Neka je $Q = (x_Q, y_Q)$ točka izvan pravca p smještena tako da se točke O i Q nalaze u suprotnim poluravninama u odnosu na pravac p. Neka je nadalje $\vec{r}_Q = x_Q \vec{i} + y_Q \vec{j}$ odgovarajući radij vektor točke Q, a Q' ortogonalna projekcija točke Q na pravac p i $\vec{q} = \overrightarrow{QQ'}$. Tada vrijedi (vidi Sliku 34.a)

$$\vec{r}_Q + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P_0} - \vec{r}_0 = 0.$$

Skalarnim množenjem s $\vec{n}_0$ dobivamo

$$\vec{r}_Q \cdot \vec{n}_0 - q + 0 - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0.$$

(a) O i Q na suprotnim stranama pravca (b) O i Q s iste strane pravca



Slika 34: Udaljenost točke do pravca u Hesseovom normalnom obliku

odnosno

$$x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta = q. \tag{54}$$

Ako je $Q = (x_Q, y_Q)$ točka izvan pravca p smještena s iste strane pravca p kao i ishodište O, ponavljajuči prethodnu proceduru dobivamo

$$\vec{r}_Q + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P_0} - \vec{r}_0 = 0,$$
$$\vec{r}_Q \cdot \vec{n}_0 + q + 0 - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0,$$

odnosno

$$x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta = -q. \tag{55}$$

Na osnovi (54)-(55) zaključujemo da je formulom

$$\delta_Q = x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta, \tag{56}$$

do na predznak određena udaljenost točke Q do pravca p. Ako je $\delta_Q > 0$, onda se tocke Q i O nalaze s različitih strana pravca p, a ako je $\delta_Q < 0$, onda se tocke Q i O nalaze s iste strane pravca p.

Udaljenost točke Q do pravca p određena je s

$$d(Q, p) = |x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta|. \tag{57}$$

Ako je pravac zadan implicitno $ax + by - c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, onda za $c > 0$ dobivamo Hesseov normalni oblik

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y - \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0,$$

a udaljenost točke $Q = (x_q, y_q)$ do pravca jednaka je

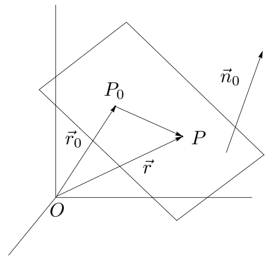
$$d(Q, p) = \left| x_Q \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + y_Q \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \right| = \frac{|ax_q + by_q - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{58}$$

16.2 Hesseov normalni oblik jednadžbe ravnine u prostoru

Neka je $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru i

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

jedinični vektor. Nekom točkom P_0 i vektorom $\vec{n}_0$ potpuno je određena ravnina koja prolazi točkom P_0 i ima normalu $\vec{n}_0$.



Slika 35: Sliku treba promijeniti !!!

Neka je $P = (x, y, z)$ proizvoljna točka u ravnini, a $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ odgovarajući radij vektor. Iz uvjeta okomitosti vektora $\vec{n}_0$ i vektora $\overrightarrow{P_0P}$ dobivamo vektorski zapis jednadžbe ravnine M

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

gdje je $\vec{r}_0$ radij vektor točke P_0. Prethodnu jednakost možemo pisati

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0 = 0,$$

odakle uz oznaku (udaljenost točke O do ravnine)

$$0 < \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0 = (r_0)_{n_0} =: \delta,$$

dobivamo **Hesseov normalni oblik jednadžbe ravnine** M u prostoru

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0. \tag{59}$$

Primjedba 12. Postoji direktna veza između implicitnog oblika jednadžbe ravnine

$$ax + by + cz - d = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0. \tag{60}$$

i Hesseovog normalnog oblika (59).

Ako je $d > 0$, jednadžbu (60) podijelimo sa $\sigma = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ i dobivamo

$$a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0, \qquad a_1 = \frac{a}{\sigma}, \quad b_1 = \frac{b}{\sigma}, \quad c_1 = \frac{c}{\sigma}, \quad d_1 = \frac{d}{\sigma},$$

pri čemu je $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$. Zbog (14), str. 24. parametar a_1 možemo shvatiti kao $\cos\alpha$, b_1 kao $\cos\beta$ a c_1 kao $\cos\gamma$, a δ kao $(d_1) > 0$.

Slično kao u prethodnoj točki, formulom

$$\Delta_Q = x_Q \cos\alpha + y_Q \cos\beta + z_Q \cos\gamma - \delta, \quad \delta = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} > 0, \tag{61}$$

do na predznak određena je udaljenost tocke $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ do ravnine M zadane u Hesseovom normalnom obliku. Udaljenosti točke $Q = (x_q, y_q, z_q)$ do ravnine M jednaka je

$$d(Q,\pi) = \frac{|ax_q + by_q + cy_q - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \tag{62}$$

što se podudara s formulom (49). Veličina (61) je pozitivna (odnosno negativna) ako su točke O i Q s raznih strana (odnosno s iste strane) ravnine M.

Zadatak 45. *Pokažite da je normala na pravac $ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ u ravnini zadana s $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$.*

[12]

Literatura

[1] D. Blanuša, *Viša matematika I-1, I-2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

[2] T. S. Blyth, E. F, Robertson, *Basic Linear Algebra*, Springer-Verlag, London, 2002.

[3] D. Butković, *Kompleksni konačno dimenzionalni vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004

[4] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[5] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2003.

[6] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear algebra*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[7] Е. И. Гурскиї, Основы линеїної алгебры и аналитицескої геометрии, Вышеїшая школа, Минск, 1982.

[8] K. Janich, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[12]Naveden je nešto opsežniji popis literature, ali sve su to knjige pomoću kojih student može utvrditi ili proširiti svoje znanje, a dostupne su u biblioteci Odjela za matematiku

[9] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[10] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2005

[11] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[12] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[13] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Наука, Москва, 1968.

[14] S. Lipschutz, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.

[15] S. Lipschutz, *Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1991.

[16] S. Lipschutz, *3000 Solved Problems in Linear Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1989.

[17] E. D. Nering, *Linear algebra and matrix theory*, John Wiley & Sons, New York, 1963.

[18] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. Blickensdörfer-Ehlers, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991

[19] И. В. Проскуряков, *Problems in linear algebra*, Мир, Москва, 1978.

[20] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1998, 2003.

[21] Zhang, Fuzhen, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.