

# Projekt u nastavi matematike srednjih škola

Mirta Benšić\*

## Sažetak

Svjetski trendovi u načinu podučavanja sve više ističu važnost uvođenje istraživačkog elementa u nastavu na svim razinama. Projektna nastava jedan je od rezultata ovakvih nastojanja. Iako svjesni velikih prednosti koje projektna nastava donosi, nastavnici u tradicionalno organiziranim školskim sustavima (kao što je u Hrvatskoj) teško uspijevaju implementirati projekt u nastavni proces, a osnovni razlog za to je organizacijskog tipa. U ovom radu predložen je način zadavanja zadataka u matematici koji sadrži istraživački element, plan istraživanja, prezentaciju i vrednovanje pa time zaslužuje naziv "zadaca projektnog tipa". Ovakve zadace mogu se lako pripremiti i uklopiti u sve nastavne teme iz matematike i postati sastavni dio svakodnevice u podučavanju matematike. Njihova prednost je što zadržavaju mnogo dobrih strana koje ima projekt, a gotovo u potpunosti eliminiraju probleme organizacijskog tipa.

## 1 Uvod

Projektna nastava definira se u pedagoškoj literaturi kao "svrhovit i organiziran proces aktivnog učenja u kojem učenici, u grupama ili samostalno, prema pažljivo planiranom projektu, istražujući dolaze do novih spoznaja" ([1]). Iako ova definicija sadrži kao ključne elemente projekta samo aktivno učenje, plan i istraživanje, projektna nastava mnogo je kompleksnije strukturirana. Mnogo više o projektnoj nastavi i načinu kako je treba provoditi saznajemo iz ciljeva projektne nastave, njenih značajki i etapa. Tako teoretičari projektne nastave navode (vidi [1], [2]):

---

\*Department of Mathematics, University of Osijek, Gajev trg 6, 31 000 Osijek, Croatia, (e-mail: mirta@mathos.hr)

- **ciljeve projektne nastave:**

- stjecanje znanja i realna mogućnost primjene u stvarnom životu,
- razvoj sposobnosti snalaženja u stvarnom životu,
- razvoj interesa za istraživanje i istraživački pristup učenju,
- razvoj interesa za umjetnost, kulturu i demokraciju,
- razvoj vještina komunikacije, tolerancije, itd.;

- **značajke projektne nastave:**

- polazište su interesi učenika,
- samostalna organiziranost i osobna odgovornost,
- etapno ciljno planiranje,
- socijalno učenje,
- interdisciplinarnost,
- uloga učitelja i učenika se mijenja,
- predstavljanje rezultata,
- refleksija;

- **etape projektne nastave:**

- pripremanje projekta (pronalaženje teme, formuliranje cilja, okvirno i detaljno planiranje),
- rad na projektu (prikupljanje podataka, obrada i analiza),
- refleksija (grupna procjena, samoprocjena).

Svjesni smo da projektna nastava, organizirana tako da ima navedene značajke, da zadovoljava navedene ciljeve i prolazi kroz predviđene etape, ima mnogo prednosti pred klasičnom nastavom. Na taj način se mnogo dublje povezuje znanje i razmišljanje, pomaže se učenicima u stjecanju vještina rješavanja problema, potiče se razvoj navike razmišljanja, istraživanja i planiranja u svim segmentima života, uključuju se i motiviraju učenici koji se dosađuju ili su indiferentni, povezuju se sadržaji koji su u klasičnoj nastavi bitno razdvojeni, uči se djecu kako prezentirati rezultete, razvija se kritičnost prema svom i tuđem radu (kroz refleksiju) ali se i razvija sposobnosti objektivnog vrednovanja svog i tuđeg rada, itd. Jednom riječju, ogromne su koristi od projektne organiziranog učenja.

Međutim, čak se i teoretičari projektne nastave slažu da ona nije prikladna za sve školske sadržaje, pri čemu posebno ističu stjecanje vještina računanja (vidi [2]). Također, u klasično organiziranom nastavnom procesu, kakav je npr. u Hrvatskoj, najveći problem pri uvođenju projekta u nastavu je organizacijskog tipa. Tako je na hrvatskim Globe internet stranicama (vidi [3]) postavljeno pitanje za raspravu: "Imamo li vremena za učeničke projekte u nastavi?" s potpitanjem: "Možemo li (smijemo li) od klasičnih predavanja otkinuti dio vremena za izvedbu učeničkih projekata?"

Realnost vezana uz projektno učenje u hrvatskim školama (posebno vezano uz nastavu matematičkih sadržaja) je da su nastavnici svjesni koristi koje se ostvaruju primjenom projekta u nastavi ali, sputani organizacijskim problemima, rijetko se odlučuju na takav oblik organizacije podučavanja. Danas je primjena projektnog učenja matematičkih sadržaja (u Hrvatskoj) najčešće vezana uz primjenu matematike te uz slobodne aktivnosti ili rad izvan predviđene nastavne satnice.

Uzimajući u obzir realnost i ogromne prednosti koje sobom nosi projektno učenje, postavlja se pitanje kako relaksirati zahtjeve koji su postavljeni u organizaciji projektne nastave tako da se riješimo organizacijskih problema i da projektno učenje i u klasično organiziranoj nastavi postane svakodnevica.

## 2 O pojmu "projekt"

Značajke projektne nastave: "polazište je interes učenika" i "interdisciplinarnost", kao i činjenica da je istraživanje u matematici temeljeno na apstraktnom mišljenju, čini matematičke sadržaje najčešće alatom u projektima, a ne temeljnim problemom koji se istražuje. Međutim, temelj projektnog učenja je *projekt* koji, po definiciji (vidi [1]), predstavlja *detaljno istraživanje važne teme po unaprijed razrađenom planu*. Dakle, sama definicija projekta ne podrazumijeva nužno interdisciplinarnost niti interes učenika kao polazište za projekt. Ovakva razmišljanja otvaraju daleko širi spektar tema koji se mogu obuhvatiti projektima u nastavi. Tako i matematički problem, postavljen od strane nastavnika ili učenika, može postati tema istraživanja projekta. Na kraju, i znanstveni projekti ne moraju biti interdisciplinarni, svako područje znanosti ima svoju karakterističnu istraživačku metodologiju i oblike rezultata. Rezultati u čisto matematičkim istraživanjima su dokazane tvrdnje.

Iako je projekt temeljni pojam u projektnoj nastavi, prezentacija i refleksija projekta značajke su karakteristične za projektnu nastavu koje nisu sadržane u samom pojmu projekta. Temeljem prezentacije i refleksije projekta ostvaruju se mnogi ciljevi projektne nastave koji su vezani uz vještine komunikacije, sposobnosti objektivnog vrednovanja svog i tuđeg rada i toler-

anciju. Dodamo li, dakle, definiranom projektu, koliko god zahtijevan on bio, prezentaciju i refleksiju, imamo zastupljene sve tri etape projektne nastave.

Ovakva razmišljanja navode na zaključak da, uvođenjem u nastavu zadaća koje sadržajno predstavljaju mali projekt te uz to sadrže obavezu prezentacije i refleksiju, ostvarujemo sve tri etape projektne nastave pa time i velik dio ciljeva projektne nastave. Obzirom da se, u matematici, skoro svaki klasičan problemski zadatak može transformirati u mali projektni zadatak, na ovaj način se otvara širok spektar tema za male projektne zadaće koji mogu obogatiti svakodnevnu nastavu matematike i u velikoj mjeri povećati kvalitetu usvojenih znanja i vještina.

### 3 Zadaća projektnog tipa

Pod pojmom "zadaća projektnog tipa" podrazumijevat ćemo jasno definiran projektni zadatak (od strane nastavnika ili zainteresiranih učenika) koji treba riješiti detaljnim istraživanjem po unaprijed utvrđenom planu, pripremiti prezentaciju te prezentirati bitne korake u istraživanju i rezultate, a iza kojega obavezno slijedi samovrednovanje te vrednovanje od strane ostalih učenika i nastavnika.

Na zadaći projektnog tipa može raditi jedan učenik ili grupa, ona može zahtijevati sasvim kratko ili nešto duže vrijeme za istraživanje, može biti i jednostavna i složena, možemo je prilagoditi djeci raznih sposobnosti za matematiku tako da svaki učenik u razredu može raditi na ovakvim zadaćama, može biti interdisciplinarna ali i ne mora. Ono što će jednu zadaću karakterizirati kao zadaću projektnog tipa su sljedeći elementi:

- istraživački karakter,
- plan istraživanja,
- prezentacija tijekom istraživanja i rezultata,
- postupak vrednovanja.

Za zadavanje zadaće projektnog tipa potrebno je

- precizno odrediti zadatak,
- dati smjernice za istraživanje i literaturu,
- dati kriterije za vrednovanje i
- zadati vrijeme trajanja prezentacije.

## Primjer 1 . Umnožak konvergentnog niza i niza koji divergira u $\infty$

Zadaća:

Istražite može li se utvrditi pravilo ponašanja umnoška jednog niza koji je konvergentan i jednog koji divergira u beskonačnost. Za slučajeve za koje je to moguće, formulirati pravilo, a ako nije moguće ilustrirajte zašto.

Smjernice za istraživanje:

- Istražiti kako se ponašaju umnošci sljedećih nizova:
  1.  $(\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N})$  i  $(n, n \in \mathbb{N})$ ,
  2.  $(\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N})$  i  $(n, n \in \mathbb{N})$ ,
  3.  $(\frac{1}{n} + 1, n \in \mathbb{N})$  i  $(n, n \in \mathbb{N})$ ,
  4.  $(\frac{1}{n} + 1, n \in \mathbb{N})$  i  $(n^2, n \in \mathbb{N})$ .
- Pronađite još primjera konvergentnih nizova i nizova koji divergiraju u beskonačnost i proučite ponašanje njihovog produkta.
- Proučite definiciju niza koji divergira u beskonačnost. Poslužite se skicom. Proučite razliku ove definicije i definicije konvergentnog niza.
- Ukoliko ste zbunjeni napravite još primjera i grupirajte ih.
- Pokušajte formirati zaključak. Prikažite zaključak pregledno i veselo! Pripremite prezentaciju od 5 minuta i objasnite kolegama na primjerima što se događa.
- Možete li dokazati neku od tvrdnji iz zaključka? Pokušajte! Dokaz predajte meni na papiru.

Literatura: .....

Kriterij vrednovanja:

1. Točnost zaključaka.
2. Preciznost izračuna i formulacija.
3. Jasnoća i zanimljivost prezentacije.

Komentari

Ovo zadaća je predviđena za učenike četvrtih razreda gimnazija i tehničkih usmjerenja.

*Može je raditi jedan učenik sam ili u paru.*

*Može se zadati na satu u kojem se uvježbavaju računske operacije s konvergentnim nizovima naprednijim učenicima.*

*Sličnih zadaća se može lako formulirati još nekoliko.*

*Smjernice se mogu modificirati, ovisno o sposobnostima i predznanjima učenika kojemu je zadaća namijenjena.*

*Ovakva zadaća osigurava usvajanje i razumijevanje definicije konvergentnog niza i niza koji divergira u beskonačnost, uvježbavanje tehnike dokazivanja tvrdnji te usvajanje metode analize problema na primjerima tijekom istraživanja u matematici.*

## **Primjer 2 Računanje vrijednosti eksponencijalne funkcije**

*Zadaća:*

- *Prikaži pregledno definicije potencije pozitivnog realnog broja ako je eksponent iz  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  i  $\mathbb{Q}$ .*
- *Što ćemo s eksponentom koji je iracionalan broj? Istraži! Izračunaj približno  $2^{\sqrt{2}}$  i  $(2^{\sqrt{2}})^2$ .*
- *Pripremi veseli plakat na kojemu će biti sistematiziran način računanja vrijednosti eksponencijalne funkcije u prirodnom broju, cijelom broju i racionalnom broju te tvoj prijedlog za računanje vrijednosti eksponencijalne funkcije u iracionalnom broju. Pripremi prezentaciju od 5 min.*

*Smjernice za istraživanje*

- *Ponovi sve što si do sada naučio o potencijama i računskim operacijama s potencijama.*
- *Što znači potencirati broj prirodnim brojem  $n$ ?*
- *Koliko iznosi  $a^0$  ( $a > 0$ )? Zašto*
- *Koliko iznosi  $a^{-1}$  ( $a > 0$ )? Zašto?*
- *Kako je definiran  $a^{\frac{1}{m}}$  ( $a > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ )? Zašto?*
- *Možemo li iracionalan broj aproksimirati (do na željenu preciznost) racionalnim brojem?*

*Literatura: .....*

*Kriterij vrednovanja:*

- 1. Točnost iskazanih tvrdnji.*
- 2. Preciznost, sistematičnost i kreativnost plakata.*
- 3. Jasnoća i zanimljivost prezentacije.*

*Komentari*

*Već i sama sistematizacija, neovisno o dodatnom dijelu zadatka za iracionalne brojeve, također ima istraživački karakter.*

*Sposobnost sistematizacije znanja važan je element koji povećava trajnost i sposobnost primjene znanja.*

*Ovakva zadaća može se zadati, npr. na satu ponavljanja računskih operacija s potencijama kao uvod za definiranje eksponencijalne funkcije na skupu realnih brojeva (drugi razred srednjih škola).*

*Ovakvom zadaćom, između ostaloga, postiže se utvrđivanje znanja o potencijama i računskim operacijama s potencijama i uočavanje problema koji nastaju prilikom računanja s iracionalnim brojevima.*

### **Primjer 3 . Obujam automobilske gume**

*Zadaća:*

*Odrediti obujam automobilske gume.*

*Smjernice za istraživanje:*

- Obzirom da je automobilska guma od materijala koji je rastezljiv, ovaj izračun će svakako biti približan.*
- Dobro proučiti oblik automobilske gume i geometrijsko tijelo — torus, s kojim ga (idealizirano!) poistovjećujemo.*
- Opisati torus kao rotacijsko tijelo, tj. izabrati prikladan koordinatni sustav i krivulju koja rotira.*
- Izvesti formulu za obujam torusa.*
- Izabrati određeni tip gume i odrediti potrebne dimenzije.*
- Možete se poslužiti tvornički danim karakteristikama ili sami mjeriti.*
- Oprez! Ako sami mjerite treba vam guma koja je prerezana jer debljina gume nije zanemariva!*

- Pripremite kratku i veselu prezentaciju modela, načina izračuna, stvarne gume i rezultata.
- Komentirajte razlike između stvarne gume i vašeg modela.
- Izračun predajte meni na papiru.

Literatura: .....

Kriterij vrednovanja:

1. Točnost iskazanih tvrdnji i izračuna.
2. Preciznost iskaza.
3. Jasnoća i zanimljivost prezentacije.

#### **Primjer 4 . Aproximativno računanje površine kruga**

Zadaća:

- Istražite koliko se možemo približiti stvarnoj vrijednosti površine kruga upisivanjem pravilnih mnogokuta u krug i računanjem njihove površine.
- Pripremite kratku prezentaciju.

Smjernice za istraživanje:

- Izaberite radijus kruga kojemu želite odrediti površinu te mu izračunajte površinu.
- Upišite krugu pravilan mnogokut i odredite razliku površine izabranog mnogokuta i površine kruga.
- Možete li se mnogokutom više približiti stvarnoj površini? Kako?
- Smanjujte razliku dok ne budete zadovoljni. Objasnite zašto ste stali baš na tom mjestu.

Literatura:

Kriterij vrednovanja:

1. Preciznost izračuna.
2. Domišljatost pri odabiru mnogokuta.
3. Obrazloženje tvrdnji i zaključaka.
4. Jasnoća i zanimljivost prezentacije.



*Obrazovni ciljevi:*

- *Primjena Pitagorinog poučka i trigonometrije pravokutnog trokuta.*
- *Ponavljanje konstrukcije i osobina pravilnih mnogokuta.*
- *Usvajanje aproksimativne metode za računanje površine upisivanjem likova kojima znamo izračunati površinu.*

### **Primjer 5 Kupovina na otplatu.**

*Zadaća: Tvoji roditelji žele kupiti televizor na otplatu. Otplate žele mjesečne, tijekom godinu dana. Da li im se više isplati uzeti potrošački kredit koji se nudi u trgovini ili kredit u banci.*

*Smjernice za istraživanje:*

- *Odaberi trgovinu, televizor i banku koja nudi nenamjenski kredit.*
- *Prouči detaljno uvjete kreditiranja, koja je kamatna stopa manja?*
- *Prouči koji kamatni račun se primjenjuje kod obračuna u trgovini, a koji u banci.*
- *Ne vjeruj samo kamatnoj stopi! Izračunaj anuitete i dodaj ostale troškove.*
- *Komentiraj razlike i pripremi prezentaciju u trajanju 5 do 10 minuta.*

*Literatura....*

*Kriteriji vrednovanja:*

1. *Preciznost izračuna.*
2. *Obrazloženje tvrdnji i zaključaka.*
3. *Jasnoća i zanimljivost prezentacije.*

Zadaće projektnog tipa mogu se zadati vrlo lako i uklopiti u klasično organiziran nastavni proces i u skoro svaku nastavnu temu. Prikladne su za učenje teoretskih sadržaja matematike i sistematizaciju gradiva jednako kao za primijenjene sadržaje. Obzirom da sadržajno mogu biti vrlo raznolike prikladne su za učenike svih nivoa sposobnosti za matematiku. Ovakve zadatke ne moraju biti vremenski zahtjevne, mogu se postaviti čak i tako da se u potpunosti, uključujući pripremu prezentacije i prezentaciju, mogu izvesti

u jednom nastavnom satu (ako nastavnik ima spremne folije i flomastere za pripremu prezentacije, odnosno neki drugi prikladan pribor u tu svrhu).

Prednost koja se ostvaruje uključivanjem ovakvih zadataka u nastavnu svakodnevicu je u navikavanju učenika na planski, istraživački način učenja u klasično organiziranom nastavnom procesu. Također, navikavanjem učenika prezentiranju rezultata i zajedničkim vrednovanjem sustavno se realiziraju neki od bitinih ciljeva suvremene škole koji se inače najprirodnije ostvaruju upravo projektnom nastavom. Ovakve zadatke ujedno pripremaju učenike za izvođenje opsežnijih interdisciplinarnih projekata.

Ukratko, zadatke projektnog tipa organizacijski su vrlo jednostavne za provođenje u klasičnom nastavnom procesu, a zadržavaju dobre strane projektne nastave.

## 4 Postupak vrednovanja

Postupak vrednovanja bitan je element koji upotpunjuje zadatak projektnog tipa i daje joj potrebnu ozbiljnost. Obzirom da se zadatak završava prezentacijom, imamo mogućnost uključiti sve učenike razreda u diskusiju i vrednovanje. Realnost ovakvog postupka krije i slijedeće probleme:

- Prirodna solidarnost učenika u dačkom uzrastu često za posljedicu ima da kolege u razredu ne žele reći kritike bojeći se da će time umanjiti ocjenu autora prezentacije.
- Nedovoljno znanje učenika u području koji je pokriven prezentacijom čini ih nedovoljno kompetentnim za realnu ocjenu.

Uzimajući u obzir ove činjenice pitamo se čemu onda uopće služi vrednovanje od strane učenika u razredu i nije li to samo gubljenje vremena od nastavnog sata (a toga i tako uvijek nedostaje) kad konačnu i realnu ocjenu može dati jedino nastavnik.

Međutim, postupak vrednovanja od strane učenika i samovrednovanje ne radi se zbog formiranja realne ocjene projektnog zadatka nego u svrhu razvijanja sposobnosti vrednovanja kod učenika te stvaranje obaveze pažljivog slušanja prezentacije. U tu svrhu potrebno je dati ozbiljnost postupcima od kojih se sastoji vrednovanje. Jedan od načina postizanja ozbiljnosti je postavljanje standardnih obaveza koje učenici imaju u postupku vrednovanja. Možemo, npr. tražiti standardan zapis podataka o prezentaciji te komentare najuspješnijeg i najmanje uspješnog aspekta u bilježnicu. Naknadno, prilikom pregledavanja bilježnica, imamo priliku dodatno ocijeniti element sposobnosti vrednovanja iz tih komentara.

Da bismo pomogli učenicima u razvijanju sposobnosti objektivnog vrednovanja možemo se poslužiti definiranjem sličnih kriterija po kojima se projektne zadaće vrednuju. Npr. u svakoj projektnoj zadaći iz matematike kao kriteriji vrednovanja mogu stajati: točnost iskazanih tvrdnji i izračuna, preciznost u izražavanju, jasnoća i zanimljivost prezentacije. Naravno da pri tome ne očekujemo od učenika da daju realnu ocjenu ovih elemenata nego da razmišljaju o njima kada navode najuspješniji i najmanje uspješan aspekt prezentacije. Time učenici ujedno postupno usvajaju navedene elemente vrednovanja kao bitne elemente prezentacija i sami ih u svojim prezentacijama nastoje zadovoljiti.

## Literatura

- [1] Munjiza, E., Peko, A., Sablić, M., *Projektno učenje*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Filozofski fakultet, Učiteljski fakultet, Osijek, 2007.
- [2] Project Based Learning Handbook,  
<http://www.bie.org/pbl/pblhandbook/index.php>
- [3] <http://public.carnet.hr/globe/projekti/miniprojekt.htm>